HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty
Matemaattis-luonnontieteellinen

Laitos — Institution — Department
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author
Sami Hårdh

Työn nimi — Arbetets titel — Title

TyEL-vakuutettujen valintaongelma: Osittainen varhennettu vanhuuseläke lisätulona

Oppiaine — Läroämne — Subject
Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Toukokuu 2018	60 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Työeläkejärjestelmä koki 1.1.2017 eläkeuudistuksen, jossa eläke-etuus valikoimaan lisättiin niin sanottu osittainen varhennettu vanhuuseläke. Tämä uusi etuus tarjoaa mahdollisuuden ottaa 25- tai 50-prosenttia kertyneestä eläkkeestä maksuun jo ennen alinta vanhuuseläkeikää. Lisäksi eläkeuudistus toi muutoksen myös varsinaiseen vanhuuseläkkeeseen siten, että jatkossa alin vanhuuseläkeikä kiinnitetään kunkin ikäluokan elinajanodotteen kehitykseen. Aikaisemmin alin vanhuuseläkeikä oli kaikille sama 63 vuotta.

Osittainen varhennettu vanhuuseläke ei aseta minkäänlaisia velvoitteita työntarjonnalle, joten sen käyttäminen on mahdollista myös lisätulona ansiotulojen ohella. Ottamalla huomioon kuolevuuden, korkoutuvuuden ja verotuksen, pystyy henkilö muodostamaan tulevan kassavirran ansiotuloista, osittaisesta varhennetusta vanhuuseläkkeestä sekä varsinaisesta vanhuuseläkkeestä. Tässä tutkimuksessa pyritäänkin selvittämään mitkä ovat optimaalisimmat valinnat osittaisen varhennetun vanhuuseläkkeen aloittamiseksi, kun ansiotaso ja varsinaisen vanhuuseläkkeen aloittamishetki oletetaan tunnetuiksi. Kassavirran maksimoiminen ei kuitenkaan ole vielä tyydyttävä ratkaisu. Tuloista saatava hyöty on erilainen riippuen tulotasosta sekä henkilön iästä, joten optimaalisuus täyttyy kassavirrasta saatavan hyödyn maksimoivalla strategialla. Hyötyä tulevat kuvaamaan utiliteettifunktiot. Koska mallissa on satunnaisuutta, optimaalisuus kriteeriksi otetaan tarkemmin ottaen kassavirrasta saatavan hyödyn odotusarvo. Lisäksi valinnat oletetaan tehtävän aina olemassa olevaan informaatioon nojautuen, joten kysymys on lopulta dynaamisesta ajassa etenevästä mallista.

Aluksi tutkimuksessa muodostetaan tarkat matemaattiset määritelmät eri eläke-etuuksille sekä niistä muodostuvalle eläkkeensaajan kassavirralle. Tuloista maksettavat verot huomioiden saadaan eläkkeensaajalle muodostettua nettokassavirta ja siitä saatava hyöty. Tämän jälkeen muodostetaan eläkkeensaajan optimointiongelma, jossa osittaisen varhennetun vanhuuseläkkeen aloittamishetket valitaan aina olemassa olevaan informaatioon nojautuen. Lisäksi Optimointiongelma sisältää tuloista saatavan hyödyn mittarin, eli utiliteettifunktion. Tämä tullaan estimoimaan käytettävissä olevasta datasta tilastollisin menetelmin. Tarkemmin ottaen utiliteettifunktioita estimoidaan useita, sillä tuloista saatava hyöty on erilainen eri ikäisille henkilöille.

Lopulta optimointiongelma ratkaistaan usealle erilaiselle henkilöprofiilille, joilla eroavina tekijöinä ovat sukupuoli, ikäluokka, tulotaso sekä vanhuuseläkkeen aloitusikä. Itse optimointi toteutetaan Python-ohjelmointikielellä muodostetulla algoritmilla. Lopuksi tuloksia tulkitaan sanallisesti.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
Henkivakuutusmatematiikka, työeläkevakuutus, utiliteettifunktio, optimointi

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

TyEL-vakuutettujen valintaongelma: Osittainen varhennettu vanhuuseläke lisätulona

Sami Hårdh

PRO GRADU -TUTKIELMA
Helsingin yliopisto

8. toukokuuta 2018

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Alkusanat

Tutkielman on ohjannut työeläkevakuutusyhtiö Varman vakuutustekniikan johtaja Ritva Tarkiainen. Haluankin esittää Ritvalle suuret kiitokset avusta ja tuesta tutkielman teon aikana.

1.1 Taustaa

Tämän tutkielman tarkoituksena on selvittää sekä selittää eläkkeelle siirtyvien ihmisten käyttäytymistä eläke-etuuksien hyödyntämisen näkökulmasta. Kohderyhmänä tulevat olemaan henkilöt, jotka ovat yli 60-vuotiaita ja näin ollen vanhuuseläkkeen kynnyksellä. Tutkimuksessa tarkasteltavien henkilöiden oletetaan olevan työssäkäyviä, jotka eivät saa mitään sosiaali- tai työttömyysetuuksia. Myös työkyvyttömyyteen liittyvät eläke-etuudet rajataan pois tässä tutkimuksessa. Kaiken kaikkiaan tutkittavat henkilöt ovat sellaisia, joiden kokonaistulot nyt ja tulevaisuudessa koostuvat vain ja ainoastaan ansiotuloista sekä vanhuuteen liittyvistä työeläke-etuuksista, tarkemmin vanhuuseläkkeestä ja osittaisesta varhennetusta vanhuuseläkkeestä.

1.1.1 Eläkeuudistus

Suomen työeläkejärjestelmä koki 1.1.2017 eläkeuudistuksen, jonka seurauksena eläke-etuus valikoimaan lisättiin perinteisen vanhuuseläkkeen, lyhyemmin VE, rinnalle niin sanottu osittainen varhennettu vanhuuseläke, lyhyemmin OVE. Ennen eläkeuudistusta vanhuuseläkkeeseen oikeuttava ikä oli tasan 63 vuotta ikäluokasta riippumatta. Eläkeuudistuksen seurauksena jokaiselle ikäluokalle määriteltiin oma alin vanhuuseläkeikä. Ensimmäinen ikäluokka, johon muutos vaikuttaa, ovat vuonna 1955 syntyneet. Heidän alin vanhuuseläkeikänsä tulee olemaan 63 vuotta ja 3 kuukautta. Tätä myöhemmin syntyneiden alin vanhuuseläkeikä kasvaa aina 3 kuukautta yhtä ikäluokkaa kohden aina 1962 syntyneisiin saakka. Vuonna 1962 syntyneiden alimmaksi vanhuuseläkeiäksi on vahvistettu 65 vuotta. Tämän lisäksi myös vuosina 1963 ja 1964 syntyneiden alimmaksi vanhuuseläkeiäksi on vahvistettu tasan 65 vuotta. Tätä myöhemmin syntyneiden alin vanhuuseläkeikä tullaan vahvistamaan vasta tulevaisuudessa, tarkemmin ottaen se tullaan sitomaan elinajanodotteen kehitykseen. Toisaalta vastapainona varsinaiseen vanhuuseläkkeeseen oikeuttavan iän nousulle, OVE tarjoaa mahdollisuuden saada osan eläkkeestä maksuun jo aikaisemmin. Nimittäin joko 25- tai 50-prosenttia kertyneestä eläkkeestä. Ikäluokan alin OVE-ikä on aina matalampi kuin alin vanhuuseläkeikä, mutta kuitenkin vähintään 61-vuotta. Mainittakoon vielä, että yllä mainitut etuudet eivät rajoita millään tavalla työntekoa, joten tulojen ja eläkkeiden yhdistäminen on täysin eläkkeensaajasta itsestään kiinni. Kaiken kaikkiaan eläkeuudistus on tuonut eri ikäluokille erilaiset lähtökohdat tulevaan eläkkeeseen varautumiseen.[1]

1.1.2 OVE ja VE etuuksina

Vanhuuseläke, eli VE, on tutkittavista etuuksistamme se perinteisempi. Vanhuuseläkkeen määrä riippuu pääpiirteittäin henkilön saamista tuloista koko työhistorian ajalta. Tämän hetkistä vanhuuseläkkeen määrää laskettaessa eläkekarttumat eri vuosilta tarkistetaan niin sanotulla palkkakertoimella vastaamaan nykyhetken tasoa, jolloin jopa vuosikymmenten takaiset eläkekertymät saadaan nykyhetken tasoon. Toisaalta tässä tutkimuksessa emme perehdy sen enempään eläkekarttumiin, vaan ajattelemme eläkekarttuman deterministisenä vakiona.

Osittainen varhennettu vanhuuseläke, eli OVE, on vaihtoehtoinen etuus ajalle ennen vanhuuseläkettä. OVEn määrän perustana on OVEn aloittamishetkeä edeltävän vuoden loppuun mennessä kertynyt vanhuuseläke. Tälle kertymälle käytetään yleisesti myös nimitystä *pohjaeläke*. OVEn määrään vaikuttaa tämän lisäksi myös eläkkeensaajan valinnat. Ensimmäinen on OVE-kerroin, joka määrittää prosenttiosuuden määrän pohjaeläkkeestä, joka halutaan ottaa maksuun. Vaihtoehtoina ovat joko 25- tai 50-prosenttia. Lisäksi määrään vaikuttaa myös OVEn aloittamishetki. Jokainen yksittäinen kuukausi ennen alinta vanhuuseläkeikää vähentää nimittäin OVEn määrää 0,4-prosenttia, ja tätä vastaavaa osuutta vanhuuseläkkeestä.

Molemmissa etuuksissa huomioidaan vielä niin sanottu *elinaikakerroin*, joka vähentää hieman maksettavan etuuden määrää. Tähän palaamme myöhemmin tutkimuksessa. Esitellään nyt kuitenkin kaksi havainnollistavaa esimerkkiä.

Esimerkki 1.1. Olkoon pohjaeläkkeen määrä 2000 euroa, OVE-kerroin 50-prosenttia ja eläkkeensaajan ikä OVEn aloittamishetkellä 61v 3kk. Olkoon lisäksi eläkkeensaajan vanhuuseläkkeeseen oikeuttava ikä 63v 0kk. Tällöin kuukausien määrä ennen alinta vanhuuseläkeikää on 21, jolloin ennen elinaikakertoimen vaikutusta OVEn määrä aloittamishetkellä on

$$E_{ove} = 2000 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.004 \cdot 21) = 916 \text{ euroa.}$$

Kuten yllä oleva esimerkki havainnollistaa, OVEn määrä ei ole suoraan 50-prosenttia pohjaeläkkeen määrästä. Toisaalta OVEn ottaminen maksuun tarkoittaa myös sitä, että kyseinen osuus eläkeestä pysyy matalampana eläkkeensaajan koko loppu elämän. Näin ollen lopullisen vanhuuseläkkeen määrä on välttämättä alhaisempi kuin ilman OVEa. Toisaalta vaihtoehtoinen näkökulma saadaan myös lykkäämällä eläkkeen aloittamista. Molemmat etuudet, sekä OVE että VE, voidaan aloittaa myös alimman vanhuuseläkeiän täyttymisen jälkeen. Tällöin jokainen lykätty kuukausi vastaavasti korottaa eläkkeen määrää 0,4-prosenttia. Tärkeä mainittava seikka on myös se, että etuudesta voidaan aina siirtyä suurempaan, eli

$$OVE25 \to OVE50 \to VE,$$

mutta vastaavaan suuntaan liikkuminen ei ole mahdollista. Jos siis henkilö aloittaa 50-prosentin OVEn, hän menettää oikeuden 25-prosentin OVEen. Vastaavasti VEn aloittaminen tarkoittaa, että oikeus OVEen on menetetty.

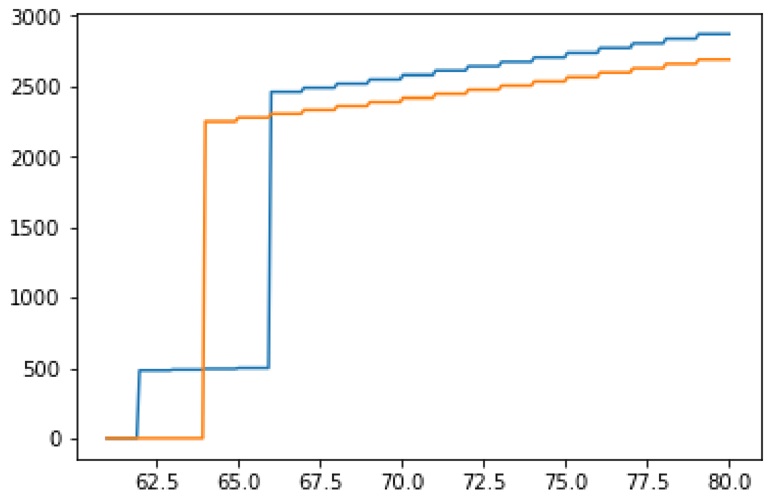
Esimerkki 1.2. Olkoon pohjaeläkkeen määrä 61-vuotiaana 2000 e/kk, ja vanhuuseläkkeeseen oikeuttava ikä 63-vuotta. Tällöin voimme muodostaa kaksi erilaista realisaatiota seuraavasti:

Oranssi kuvaa tilannetta, jossa VE otetaan maksuun 64-vuotiaana. Sininen kuvaa tilannetta, jossa ensin otetaan 62-vuotiaana OVE maksuun kertoimella 0.25, ja 66-vuotiaana VE. Maksussa olevan eläkkeen realisaatio näyttää siis seuraavanlaiselta:

Ylläolevan esimerkin kuvasta (1.1) voi huomata, että eläkkeiden määrä kasvaa myös ollessaan maksussa. Tämä johtuu siitä, että eläkkeitä korotetaan vuosittain niin sanotulla eläkeindeksillä. Tähän palaamme myöhemmin tutkimuksessa.

1.2 Tutkimuksen tavoitteet

Tutkimuksen tarkoituksena on löytää eläkkeensaajan optimaalinen valinta osittaisen varhennetun vanhuuseläkkeen käyttämiseksi lisätulonlähteenä ennen varsinaiselle vanhuuseläkkeelle siirtymistä. Ottamalla huomioon verotuksen, eläkkeensaajan tulevat nettosaatavat pystytään muodostamaan yhdistelmänä osittaisesta varhennetusta vanhuuseläkkeestä, ansioista sekä varsinaisesta vanhuuseläkkeestä. Kassavirran maksimoiminen ei kuitenkaan



Kuva 1.1: Oranssi = VE 64 (2230 e), Sininen = OVE 62 (485 e) ja VE 66 (2425 e)

vielä ole tyydyttävä ratkaisu, sillä eläkkeensaajan kokema hyöty rahasta on erilainen eri ajan hetkinä. Eläkkeensaajan kokema hyöty rahasta eri ajanhetkinä tullaan kuvaamaan niin sanotun utiliteettifunktion avulla. Tällöin lopullinen optimaalinen valinta löytyy utiliteetin odotusarvon maksimoivalla strategialla. Lisäksi ajan edetessä eläkkeensaajan tieto elossaolotodennäköisyyksistä lisääntyy, jolloin valinnatkin voisi olettaa tehtävän aina olemassa olevaan informaatioon nojautuen. Tutkimuksen tavoitteena on lopulta löytää eläkkeensaajalle tällainen dynaaminen strategia tietyin oletuksin. Eläketurvakeskuksen Jari Kanniston tekemästä tilastokatsauksesta [2] käy ilmi, että OVEn aloittaneista henkilöistä peräti 60% ei ole muuttanut työntarjontaa OVElle siirtymisen jälkeen. Tämä motivoi tutkimaan nimenomaan OVEn sopivuutta lisätuloksi erilaisille henkilöille, joiden työntarjonta ei muutu ennen varsinaiselle vanhuuseläkkeelle siirtymistä. Toisin sanoen OVElle siirtyminen ei muuta työntarjontaa. Teoria tullaan kuitenkin rakentamaan olettamatta kiinteätä työntarjontaa ja tunnettua vanhuuseläkkeen alkamishetkeä. Nämä oletuksen otetaan mukaan vasta lopun numeerisissa tuloksissa.

1.3 Tutkimuksen rakenne

Aloitamme tutkimuksen esittelemällä hieman matemaattisia työkaluja todennäköisyyslaskennasta sekä henkivakuutusmatematiikasta. Tämän jälkeen tulemme antamaan tutkimuksen kohteena oleville eläke-etuuksille tarkat matemaattiset määritelmät. Näiden avulla muodostamme lopulta eläkkeensaajan optimointiongelman, jonka maksimaalisen ratkaisun pyrimme lopulta löytämään. Ratkaisun löytämiseksi tulemme esittelemään ratkaisuun tarvittavaa teoriaa, jonka lisäksi estimoimme saatavilla olevasta aineistosta utiliteettifunktiot kuvaamaan ansiotuloista ja eläkkeistä saatavaa hyötyä. Lopuksi laskemme muutamia numeerisia tuloksia erilaisille henkilöprofiileille.

Luku 2

Matemaattiset työkalut

Tässä kappaleessa käymme läpi matemaattisia työkaluja, joita tarvitsemme tutkimuksessamme. Tarvittavat työkalut koostuvat pitkälti todennäköisyysteoriasta sekä henkivakuutusmatematiikasta. Käytämme hyödyksi teoksia *Probability: Theory and Examples* [3] sekä *Henkivakuutusmatematiikka* [4].

2.1 Todennäköisyysteoriaa

Todennäköisyysavaruus on kolmikko $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jossa Ω on alkioiden joukko, $\mathcal{F}$ tapahtumien joukko ja $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ todennäköisyysmitta. Itseasiassa $\mathcal{F}$ on kokoelma Ω:n osajoukkoja, jota kutsumme sigma-algebraksi. Tämän tarkka määritelmä on seuraavanlainen.

Määritelmä 2.1. *Sigma-algebra.* Olkoon $\mathcal{F}$ sigma-algebra jossakin todennäköisyysavaruudessa. Tällöin pätee

1) Jos $A \in \mathcal{F}$, niin myös A:n komplementti $A^c \in \mathcal{F}$, ja
2) Jos $A_i \in \mathcal{F}$ on numeroituva jono joukkoja, niin myös $\cup_i A_i \in \mathcal{F}$.

Lemma 2.2. *Olkoon $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n$ kasvava jono sigma-algebroja ajan suhteen. Tällöin $\mathcal{F}_{t \geqslant 0}$ kutsutaan filtraatioksi, tai informaatioksi.*

Tutkimuksessamme puhutaan paljon odotusarvoista, joten meidän on syytä määritellä erilaisia odotusarvoon liittyviä ominaisuuksia. Jonkin satunnaismuuttujan X odotusarvo määritellään siten, että

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X \, dP,$$

missä P on todennäköisyysmitta, ja Ω todennäköisyysavaruuden alkioiden joukko. Kun satunnaismuuttuja X on jatkuva, ja sillä on olemassa tiheysfunktio reaalilukujen joukossa, edellisen yhtälön vastine voidaan esittää muodossa

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx,$$

missä f on satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Odotusarvolle pätee nyt seuraavat hyödylliset ominaisuudet.

Lause 2.3. *Olkoon X ja Y sellaisia satunnaismuuttujia joiden odotusarvot ovat äärellisiä, siis $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y) < \infty$. Tällöin pätee seuraavat ominaisuudet:*

$$\begin{aligned}
&1)\ \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X),\\
&2)\ \mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b, \quad \textit{kaikilla } a, b \in \mathbb{R},\\
&3)\ \textit{Jos } X \geq Y, \ \textit{niin myös } \mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y).
\end{aligned}$$

Todistus. [3] s. 24. □

Määritelmä 2.4. *Ehdollinen odotusarvo.* Kutsumme odotusarvoa $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}\right)$ ehdolliseksi odotusarvoksi ehdolla $\mathcal{F}$, missä $\mathcal{F}$ on todennäköisyysavaruuden sigma-algebra. Ehdollinen odotusarvo on nyt jokin satunnaismuuttuja Y, jolle pätee

$$\begin{aligned}
&1)\ Y \text{ on } \mathcal{F}\text{-mitallinen},\\
&2)\ \text{kaikilla } A \in \mathcal{F} \text{ pätee } \int_A X\, dP = \int_A Y\, dP.
\end{aligned}$$

Tulemme myöhemmin käyttämään indikaattorifunktioita, joten meidän on syytä käsitellä hieman niitä. Yleisesti indikaattorifunktio on funktio, joka saa vain arvoja 0 tai 1, riippuen indikaattorifunktion kohteen arvosta.

Määritelmä 2.5. *Indikaattorifunktio.* Olkoon A jokin mielivaltainen joukko muuttujan X mahdollisia arvoja. Tällöin indikaattorifunktio voitaisiin matemaattisesti määritellä niin, että

$$\mathbf{1}(X \in A) = \begin{cases} 1, & \text{jos } X \in A \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Jos nyt yllä olevan määritelmän X on satunnaismuuttuja, saamme indikaattorifunktion odotusarvolle seuraavanlaisen tuloksen.

Lemma 2.6. *Olkoon indikaattorifunktio kuten määritelmässä (2.5), ja X jokin satunnaismuuttuja. Tällöin indikaattorifunktion odotusarvo on*

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}(X \in A)) = \mathbb{P}(X \in A).$$

Vastaavasti sen ehdollinen odotusarvo ehdolla $\mathcal{F}$ on

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}(X \in A) \mid \mathcal{F}) = \mathbb{P}(X \in A \mid \mathcal{F}).$$

2.2 Henkivakuutusmatematiikkaa

Kuvaamme tässä kappaleessa vastasyntyneen elinaikaa satunnaismuuttujalla X jossain todennäköisyysavaruudessa. Elinajan oletetaan olevan jatkuvasti jakautunut, jolloin sillä on olemassa tiheys- sekä kertymäfunktiot. Olkoon f elinajan tiheysfunktio. Elinajan jakaumaa kuvaa nyt

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$

missä luonnollisesti $x \geq 0$ puhuttaessa elinajoista. On tarpeellista kuitenkin puhua elinajan ehdollisesta jakaumasta, sillä tarkasteltavat henkilöt ovat aina jossakin nollaa suuremmassa iässä. Tällöin pätee

$$\mathbb{P}(X \leqslant x + t \mid X > x) = \frac{F(t) - F(x)}{1 - F(x)},$$

joka kuvaa siis todennäköisyyttä että x-ikäinen henkilö elää vielä enintään t-vuotta. Tälle käytämme lähdekirjallisuudessakin käytettyä vastaavaa merkintää ${}_tq_x$. Vastaavasti todennäköisyyttä sille, että x-ikäinen henkilö selviytyy hengissä vielä t-vuotta, merkitään ${}_tp_x$. Siis pätee

$${}_tp_x = \mathbb{P}(X > t + x \mid X > x) = 1 - {}_tq_x.$$

Määritelmä 2.7. *Kuolevuus.* Olkoon henkilön elinaikaa kuvaava kertymäfunktio $F(x)$. Tällöin raja-arvoa

$$\mu_x = \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{{}_{\Delta t}q_x}{\Delta t} = \frac{F'(x)}{1 - F(x)}$$

kutsutaan kuolevuudeksi, joka kuvaa x-ikäisen kuolevuusintensiteettiä.

Lause 2.8. *Todennäköisyydelle ${}_tp_x$ voimme käyttää nyt kuolevuuden avulla muotoa*

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+u}\,du\right).$$

Todistus. [4] s. 47-48. □

Rahamääristä puhuttaessa, tässä tutkimuksessa tarkemmin eläkkeistä, on huomioitava myös rahan arvon muuttuvuus. Rahan arvoa mitataan luonnollisesti korolla. Olkoon nyt vuosikorko i, tällöin voimme muodostaa vuosikoron kautta niin sanotun *korkoutuvuuden*.

Määritelmä 2.9. *Korkoutuvuus.* Olkoon $i^{(n)}$ n. osavuoden nimelliskorko, jolle pätee siis

$$\left(1+\frac{i^{(n)}}{n}\right)^n = 1+i.$$

Tällöin korkoutuvuus on osavuoden nimelliskoron raja-arvo, siis

$$\delta = \lim_{n\to\infty} i^{(n)}.$$

Lause 2.10. *Olkoon i vuosikorko ja δ korkoutuvuus. Tällöin vuosikorkoa i vastaava korkoutuvuus on*

$$\delta = \ln(1+i).$$

Todistus. [4] s. 12. □

Lause 2.11. *Olkoon $\delta(t)$ korkoutuvuus. Tällöin korkoutus hetkestä 0 hetkeen t voidaan suorittaa kertomalla korkoutuskertoimella*

$$\exp\left(\int_0^t \delta(u)\,du\right).$$

Vastaavasti diskonttaus hetkestä t hetkeen 0 saadaan kertomalla diskonttokertoimella

$$\exp\left(-\int_0^t \delta(u)\,du\right).$$

Todistus. [4] s. 13. □

Henkivakuutusmatematiikassa tulevaisuudessa suoritettavan rahamäärän nykyarvon tulee huomioida koron aiheuttama arvonmuutos, sekä myös eliniän satunnaisuus. Tätä tulevaisuudessa suoritettavan rahamäärän koron ja satunnaisen eliniän huomioivaa nykyarvoa kutsumme *pääoma-arvoksi.*

Määritelmä 2.12. *Pääoma-arvo.* Olkoon S ajan t kuluttua maksettava eläke. Olkoon korkoutuvuus δ ja x-ikäisen eläkkeensaajan kuolevuus μ_x. Tällöin ajan t kuluttua maksettavan eläkkeen pääoma-arvo on

$$S\cdot\exp\left(-\int_0^t \mu_{x+u}+\delta(u)\,du\right).$$

Huomautus 2.13. Jos kysymyksessä olisi eläkevakuutus, vakuutuksen hinta voisi ainakin teoriassa olla tulevaisuudessa maksettavien eläkkeiden pääoma-arvo.

Luku 3

OVE/VE-malli

Tässä kappaleessa muodostamme mallin kuvaamaan eläkkeensaajan tulevaa kassavirtaa. Kassavirta tulee koostumaan kolmesta elementistä. Näitä ovat osittainen varhennettu vanhuuseläke (OVE), vanhuuseläke (VE) sekä ansiotulot (A). Mallin tarkoituksena on kuvata tulevaa kassavirtaa, joka riippuu eläkkeensaajan tekemistä päätöksistä. Eläkkeitä maksetaan kerran kuukaudessa, joten on tärkeää huomioida, että mallissa käytettävät ajanhetket tarkoittavat kuukausien lukumäärää.

3.1 Oletukset

On tyypillistä, että eläkkeelle siirrytään hyvin erilaisista elämäntilanteista. Yleensä henkilö on ennen eläkkeelle siirtymistään työelämässä, jolloin hänen tulee arvioida milloin olisi hänen kohdallaan oikea hetki siirtyä eläkkeelle. Mahdollisia muita taustoja voisi olla esimerkiksi työttömyys tai sairaus. Tässä tutkimuksessa rajaudumme kuitenkin henkilöihin, jotka ovat ennen eläköitymistään työelämässä, ja siirtyvät aikanaan OVE:lle tai VE:lle. Lisäksi oletamme, että tarkasteltavat henkilöt eivät kartuta eläkettä lisää minkään muun kuin ansioiden kautta. Todellisuudessa muuta tällaista voisi olla esimerkiksi lapsenhoitoaika tai kouluttautuminen, joista ei saa ansiotuloja, mutta ne kerryttävät lisää eläkettä.

Oletamme, että henkilö on iässä, jossa olisi oikeutettu hakemaan OVEn mukaista eläkettä maksuun. Tämä hetki on mallin kannalta siis t_0. Eläkkeensaajalla on valittavanaan kolme ajanhetkeä. Ensimmäinen on hetki, jolloin hän päättää ottaa OVEn maksuun 25-prosentin kertoimella. Tälle käytämme merkintää τ_{25}. Seuraava ajanhetki on τ_{50}, jolloin eläkkeensaaja päättää korottaa OVEn 50-prosenttiin. Viimeinen ajanhetki on vanhuuseläkkeen ottaminen maksuun. Tämän merkintänä käytämme τ_{ve}. Lisäksi merkitsemme t_{ve} hetkenä, jolloin henkilöllä olisi oikeus vanhuuseläkkeeseen. Nyt näille merkinnöille pätee seuraavanlainen järjestys:

$$
(3.1) \qquad \begin{cases} t_0 \leqslant \tau_{25} \leqslant \tau_{50} \leqslant \tau_{ve}, \\ \tau_{ve} \in [t_{ve}, \infty). \end{cases}
$$

Merkille pantavaa on, että OVEn voi korottaa 25-prosentista 50-prosenttiin, mutta päinvastainen suunta ei ole mahdollinen. Vanhuuseläkkeeltä ei myöskään ole mahdollista siirtyä takaisin OVElle.

3.2 Korot ja kertoimet

Oletamme jatkossa, että tarkasteltavat henkilöt ovat syntyneet vuoden ensimmäisenä päivänä, eli $1.1.v$, missä v on syntymävuosi. Tämä tekninen yksinkertaistus johtaa siihen, että henkilöt täyttävät vuosia aina vuodenvaihteessa. Lisäksi oletamme kalenterikuukausien olevan numeroitu niin, että

$$
\begin{aligned}
&\text{Tammikuu} : 0 + 12n, \\
&\text{Helmikuu} : 1 + 12n, \\
&\vdots \\
&\text{Marrasuu} : 10 + 12n, \\
&\text{Joulukuu} : 11 + 12n,
\end{aligned}
$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tämäkin helpottaa teknisesti, sillä nyt vuoden alku (tammikuu) on aina 12-jaollinen. Motivaatio tälle selviää seuraavaksi.

Käyttämämme rahamäärät ovat aina jonkin vuoden indeksitasossa. Rahamäärän muuttamista halutun vuoden indeksitasoon kutsumme indeksoinniksi. Eläkkeiden laskennassa käytetään kahta erilaista indeksiä, *palkkakerrointa* ja *eläkeindeksiä*. Merkitään näiden vastaavia vuosimuutoksia i_p:llä ja i_e:llä. *Palkkakerroin* on indeksi, jolla indeksoidaan kaikkia muita käyttämiämme rahamääriä paitsi maksussa olevia eläke-etuuksia. Eläkeindeksi vastaa taas maksussa olevien eläke-etuuksien indeksoinnista. Kyseiset indeksit määräytyvät eri tavoin, ja niiden vahvistaminen tapahtuu vuosittain sosiaali- ja terveysministeriön toimesta. Niiden suuruus ei siis ole välttämättä sama. Näiden indeksien käytölle ominaista on, että niiden vaikutus tapahtuu aina vuoden vaihteessa. Jatkossa käytämme merkintää $\lfloor t \rfloor$ kuvaamaan jonkin ajanhetken t viimeisintä 12-jaollista lukua. Tämä tarkoittaa esimerkiksi, että $\lfloor 17 \rfloor = 12$ ja $\lfloor 24 \rfloor = 24$.

Määritelmä 3.2. Olkoon i palkkakertoimen tai eläkeindeksin vakio vuosimuutos. Tällöin indeksointi hetkestä s hetkeen t tapahtuu kertoimella

$$(1+i)^{\left(\frac{\lfloor t \rfloor - \lfloor s \rfloor}{12}\right)}.$$

Jatkossa käytämme merkintöjä D_p ja D_e kuvaamaan indeksointia palkkakertoimella ja eläkeindeksillä, siis

$$D_p(s,t) = (1+i_p)^{\left(\frac{\lfloor t \rfloor - \lfloor s \rfloor}{12}\right)}$$

ja

$$D_e(s,t) = (1+i_e)^{\left(\frac{\lfloor t \rfloor - \lfloor s \rfloor}{12}\right)}.$$

Tarvitsemme myös korkouttamista, jonka avulla voimme huomioida rahan arvon muuttuvuuden myös osavuosittain. Tämä tulee tarpeeseen myöhemmin. Korkouttamista hetkestä s hetkeen t merkitsemme $d(s,t)$, jossa tarpeen tullen voimme käyttää myös alaindeksiä p tai e jos kyse on palkkakertoimen tai eläkeindeksin mukaisesta kasvusta. Nyt siis lauseen 2.11 mukaisesti

$$d(s,t) = \exp\left(\int_{s/12}^{t/12} \delta(u)\, du\right),$$

missä δ vastaa käytettävää vuosikorkoa.

Eläkkeisiin tehdään myös tietynlaisia vähennyksiä ja korotuksia, jotka lasketaan eläke-etuuteen sen alkamishetkellä. Näitä ovat *varhennusvähennys*, *lykkäyskorotus* ja *elinaikakerroin*. *Varhennusvähennys* toimii siten, että alkava eläke pienenee pysyvästi mikäli eläke otetaan maksuun ennen alinta vanhuuseläkeikää t_{ve}. Vähennys on suuruudeltaan 0.4% kerrottuna kuukausien lukumäärällä ennen alinta vanhuuseläkeikää t_{ve}. Vastaavasti jos taas eläke-etuus otetaan maksuun alimman vanhuuseläkeiän jälkeen, määrä kasvaa 0.4% jokaista t_{ve} ylittävää kuukautta kohden. Tätä kutsutaan *lykkäyskorotukseksi*. Siis kaiken kaikkiaan kerroin alkavaan eläkkeeseen on

$$1 - 0.004(t_{ve} - t),$$

missä t on eläkkeen alkamishetki. *Elinaikakerroin* taas on tekijä, joka leikkaa aina osan eläkkeestä alkamishetkellä. Tämänkin vaikutus eläke-etuuteen on pysyvä. Elinaikakerroin kiinnittyy eläke-etuuden alkamishetkellä, ja määrittyy joko eläkkeensaajan syntymävuoden v tai etuuden alkamishetken t perusteella. Olkoon tämä $e(t,v)$. Voimme nyt yhdistää helposti edellämainitut tekijät. Olkoon $c(t,t_{ve},v)$ näitä kuvaava kerroin, siis

$$c(t,t_{ve},v) = (1 - 0.004(t_{ve} - t))e(t,v),$$

missä t on eläke-etuuden alkamishetki ja v henkilön syntymävuosi. Tarkemmat tiedot elinaikakertoimesta löytyvät liitteestä A.2.

3.3 Eläke-etuudet

Jotta voisimme rakentaa eläkkeensaajan kassavirtaa kuvaavan mallin, meidän täytyy muodostaa yksittäisille eläkelajeille tarkat matemaattiset määritelmät. Kaiken perustana on niin sanottu *pohjaeläke*, joka kuvaa eläkekarttumaa ennen yhdenkään etuuden ottamista maksuun.

Määritelmä 3.3. *Eläkekarttuma.* Olkoon eläkekarttuma hetkellä t_0 deterministinen $E_k(t_0)$. Tällöin eläkekarttuma hetkellä t on

$$E_k(t) = E_k(t_0)D_p(t_0, t) + a(t_0, t),$$

jossa $a(t_0, t)$ on välillä $[t_0, t)$ karttunut eläke ansiotuloista hetken t tasossa.

Määritelmä 3.4. *Pohjaeläke.* Olkoon eläkekarttuma E_k kuten edellä. Tällöin pohjaeläke jonakin hetkenä t määritellään kaavalla

$$E_p(t) = E_k(\lfloor t \rfloor - 1)(1 + i_p) + a(\lfloor t \rfloor - 1, \lfloor t \rfloor).$$

Pohjaeläke tarkoittaa siis jonkin hetken t edeltävän vuoden loppuun mennessä karttunutta eläkettä korotettuna seuraavan vuoden tasoon. Merkille pantavaa on, että yleisesti pohjaeläke tarkoittaa edellisen vuoden loppuun mennessä karttunutta eläkettä, mutta tässä tutkimuksessa otamme määritelmään mukaan myös korotuksen seuraavan vuoden tasoon. Tämä tulee helpottamaan merkintöjä jatkossa.

Nyt henkilöllä on valittavanaan OVEn aloitushetki. OVEn määrä perustuu määritelmän (3.4) mukaiseen pohjaeläkkeeseen OVEn alkamishetkellä. Eli siis henkilön jäädessä OVElle esimerkiksi 1.7.2018, OVEn määrän perustana käytetään 31.12.2017 mennessä karttunutta eläkettä korotettuna vuoden 2018 indeksitasoon, siis määritelmän (3.4) mukaista pohjaeläkettä hetkellä 1.7.2018. Huomioitavaa on myös, että 25-prosentin OVElta 50-prosentin OVElle siirryttäessä, pohjaeläke on jo kiinnitetty 25-prosentin OVEn alkamishetkellä.

Määritelmä 3.5. *OVE.* Olkoon $E_p(t)$ hetken t pohjaeläke. Henkilön vanhuuseläkkeeseen oikeuttavan iän ollessa t_{ve}, 25-prosentin OVEn määrä OVEn aloittamishetkellä t on

$$E_{25}(t) = 0.25E_p(t)c(t, t_{ve}, v).$$

Vastaavasti 50-prosentin OVEn määrä alkamishetkellä t on

$$\begin{aligned} E_{50}(\tau_{25}, t) &= E_{25}(\tau_{25})D_e(\tau_{25}, t) \\ &+ 0.25E_p(\tau_{25})D_p(\tau_{25}, t)c(t, t_{ve}, v), \end{aligned}$$

missä $\tau_{25} \leq t$.

Lause 3.6. *Olkoon OVE kuten määritelmässä (3.5). Olkoon nyt* $\tau_{25} = \tau_{50}$*, eli 25-prosentin OVEa ei käytetä. Tällöin pätee*

$$E_{50}(\tau_{25}, \tau_{50}) = 0.5 E_p(\tau_{50}) c(\tau_{50}, t_{ve}, v).$$

Todistus. Suoraviivaisesti laskemalla

$$\begin{aligned}
E_{50}(\tau_{25}, \tau_{50}) &= E_{25}(\tau_{25}) D_e(\tau_{25}, \tau_{50}) + 0.25 E_p(\tau_{25}) D_p(\tau_{25}, \tau_{50}) c(\tau_{50}, t_{ve}, v) \\
&= E_{25}(\tau_{50}) D_e(\tau_{50}, \tau_{50}) + 0.25 E_p(\tau_{50}) D_p(\tau_{50}, \tau_{50}) c(\tau_{50}, t_{ve}, v) \\
&= E_{25}(\tau_{50}) + 0.25 E_p(\tau_{50}) c(\tau_{50}, t_{ve}, v) \\
&= E_{25}(\tau_{50}) + E_{25}(\tau_{50}) \\
&= 2 E_{25}(\tau_{50}) \\
&= 0.5 E_p(\tau_{50}) c(\tau_{50}, t_{ve}, v).
\end{aligned}$$

□

Seuraavaksi määrittelemme varsinaisen vanhuuseläkkeen. Vanhuuseläkkeen määrä koostuu jo aikaisemmin maksuun otetusta OVEsta, sekä vielä ei maksussa olevasta eläkekarttumasta. Lisäksi muut ansiot OVEn ohella ovat mahdollisesti kerryttäneet lisää eläkettä. Nämä huomioidaan lopullista vanhuuseläkettä määritettäessä.

Määritelmä 3.7. *Vanhuuseläke, VE.* Olkoon τ_{25} ja τ_{50} OVEn maksuunotto hetket. Tällöin vanhuuseläkkeen määrä aloitushetkellä t on

$$\begin{aligned}
E_{ve}(\tau_{25}, \tau_{50}, t) = {} & E_{50}(\tau_{25}, \tau_{50}) D_e(\tau_{50}, t) \\
& + \left[\, 0.5 E_p(\tau_{25}) D_p(\tau_{25}, t) + a(\lfloor \tau_{25} \rfloor, t) \,\right] c(t, t_{ve}, v).
\end{aligned}$$

Nyt siis olemme määritelleet komponentit kuvaamaan eri eläke-etuuksia. Yllä olevat määritelmät tarkoittavat myös sitä, että vanhuuseläkkeen määrä on sama kuin määritelmän (3.3) eläkekarttuma vanhuuseläkkeen alkamishetkellä, jos henkilö ei ole ottanut OVEa missään vaiheessa maksuun. Tällöin OVE/VE hetkille pätee tietysti $\tau_{25} = \tau_{50} = \tau_{ve}$. Jos taas henkilö on ottanut OVEn maksuun, OVEn perustana olevasta pohjaeläkkeestä jäljelle jäävä osuus, ns. säästöosuus, indeksoidaan vanhuuseläkehetkeen palkkakertoimella. OVE-osuus indeksoidaan taas eläkeindeksillä. Lisäksi henkilö voi saada OVEn ohessa lisää ansiotuloja. Nämä kartuttavat lisää eläkettä, eli tavallaan kasvattavat säästöosuutta. Määritelmät yllä kuvaavat etuuksien määrää alkamishetkinään. Nyt voimme määritellä yleisesti maksussa olevan eläkkeen määrän mille tahansa ajanhetkelle.

Määritelmä 3.8. *Maksettava bruttoeläke.* Olkoon eläkkeen määrä sellainen, että se toteuttaa määritelmät (3.4), (3.5) ja (3.7). Olkoon lisäksi aloitushetket τ_{25}, τ_{50} ja τ_{ve} tunnetut. Tällöin voimme määritellä yleisesti maksettavan eläkkeen määrän eri ajanhetkillä. Maksettavan eläkkeen määrä hetkellä t on

$$\begin{aligned} E(t) &= E_{25}(\tau_{25})D_e(\tau_{25}, t)\mathbf{1}\{\tau_{25} \leq t < \tau_{50}\} \\ &+ E_{50}(\tau_{50})D_e(\tau_{50}, t)\mathbf{1}\{\tau_{50} \leq t < \tau_{ve}\} \\ &+ E_{ve}(\tau_{ve})D_e(\tau_{ve}, t)\mathbf{1}\{\tau_{ve} \leq t\}. \end{aligned}$$

3.4 Kassavirrat

3.4.1 Tuleva eläkekassavirta

Edelliset määritelmät antavat tavan muodostaa kuukausittain maksettavista eläkkeistä kassavirran ja sen odotusarvon. Henkilön ottaessa eläkkeen maksuun, eläkettä maksetaan hänelle kuolemaan saakka. Kuukausittain maksettavat eläkkeet muodostavat näin ollen *kassavirran.* Olkoon T henkilön kuolinhetki, eli satunnaismuuttuja. Oletamme, että tämä on äärellinen, siis on olemassa $K < \infty$ siten että $T \leq K$. Nyt siis kuukausittainen eläke maksetaan hetkellä t jos $T > t$. Siis tuleva kassavirta on

$$E_{Total} = \sum_{t=t_0}^{K} E(t)\mathbf{1}\{T > t\},$$

missä kannattaa huomioida, että $E(t) = 0$ jos $t < \tau_{25}$. Mallin satunnaisuus tulee nyt siitä, että kuolinhetki T on satunnaismuuttuja. Tämän määrittelemiseksi käytämme tässä tutkimuksessa TyEL-kuolevuutta (liite A.3). Voimme kuitenkin arvioida kassavirran odotusarvoa. Siis

$$\mathbb{E}(E_{total}) = \sum_{t=t_0}^{K} E(t)\mathbb{P}(T > t).$$

Toisaalta tämä ei vielä riitä kuvaamaan mallia tarpeeksi hyvin. Arviointi tulevasta kassavirrasta tehdään nykyhetkenä, joten tulevat eläkkeet on vielä diskontattava nykyhetkeen. Tällöin saamme muodostettua kassavirralle *pääoma-arvon.* Diskonttaus tapahtuu korkoutuvuuden $\delta = \ln(1 + i_e)$ avulla.

Määritelmä 3.9. *Eläkevirran pääoma-arvo.* Oletetaan, että maksettava eläke eri ajanhetkinä toteuttaa määritelmän (3.8). Tällöin tulevan kassavirran pääoma-arvo hetkellä s on

$$\sum_{t=s}^{K} \frac{E(t)\mathbb{P}(T > t)}{d_e(s, t)}.$$

Huomautus 3.10. Valitsimme eläkeindeksin mukaisen kasvun diskonttotekijään vuosikoroksi, sillä se määräytyy pitkälti yleisen hintatason muutoksesta (painotus 80%). [12]

3.4.2 Verot ja nettokassavirta

Eläkkeet eivät bruttomääräisenä kuvaa todellisuutta, joten joudumme ottamaan myös verotuksen huomioon. Verotus tuottaa hankaluuksia malliimme sen takia, että eläkkeen verotus on erilainen tilanteissa joissa eläkkeensaajalla on ansiotuloja [13]. Näin ollen verotus on bruttomääräisen eläkkeen ja bruttomääräisten ansiotulojen funktio. Merkitään verojen määrää funktiona $v(E, A)$. Kaikessa yksinkertaisuudessaan, vero on miinus merkkinen tekijä mallissamme, joten tämä riittää tässä vaiheessa kuvaamaan verojen määrää kuukauden aikana. Verotus on määritelty tarkemmin liitteessä (A.4).

Lisättäessä malliin ansiotulot $A(t)$ jokaiselle ajanhetkelle t, meillä on käytössämme kaikki mahdolliset komponentit kuvaamaan eläkkeensaajan todellista nettokassavirtaa kaikkina ajanhetkinä. Itseasiassa kysymyksessä on tavoittelemamme *OVE/VE-malli.*

Määritelmä 3.11. *OVE/VE-malli.* Olkoon $E_p(t)$ pohjaeläkkeen määrä hetkellä t, alin vanhuuseläkeikä t_{ve} ja eläkkeiden alkamishetket τ_{25}, τ_{50} ja τ_{ve}. Olkoon lisäksi $A(t)$ ansiotulot hetkellä t. Tällöin eläkkeensaajan kuolinhetken ollessa T, tuleva nettokassavirta jonakin ajanhetkenä s on

$$V(s) = \sum_{t=s}^{K} \frac{(E(t) + A(t) - v(E(t), A(t)))\mathbf{1}\{T > t\}}{d_e(s,t)}.$$

Jatkossa merkitsemme lyhyemmin nettotuloja $N(t) = (E(t) + A(t) - v(E(t), A(t)))$, siis eläkkeensaajan diskontattu nettokassavirta on

$$V(s) = \sum_{t=s}^{K} \frac{N(t)}{d_e(s,t)}\mathbf{1}\{T > t\}.$$

Esimerkki 3.12. Oletetaan että henkilö on tasan 61-vuotias, joka on samalla hänen alin OVEen oikeuttava ikä, eli $t_0 = 0$. Oletetaan että hänen alin vanhuuseläkeikänsä on 63-vuotta, ja eläkkeiden alkamishetket $\tau_{25} = 3$ (61v 3kk), $\tau_{50} = 12$ (62v 0kk) ja $\tau_{ve} = 28$ (63v 4kk). OVEn perusteena oleva pohjaeläke hetkellä τ_{25} on 2000 e/kk. Työtä hän tekee siten, että hänen ansiotulonsa ovat 3000 e/kk ennen 50% OVEa, tämän jälkeen 1500 e/kk ja 0 e/kk jäädessään vanhuuseläkkeelle. Työansioiden oletetaan kartuttavan uutta eläkettä kertoimella 0.015/12. Oletetaan että elinaikakerroin on 0.95 kaikkina ajanhetkinä. Lisäksi palkkakertoimen kasvu on 1.05 ja eläkeindeksin kasvu 1.04. Tällöin bruttoeläke-etuudet alkamishetkinään ovat

$$\begin{aligned}
E_{25}(3) &= 0.25 \cdot E_p(3) \cdot c(3, 24, v) \\
&= 0.25 \cdot 2000 \cdot 0.95 \cdot (1 - 0.004(24 - 3)) \\
&= 435.1 \text{ e/kk},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{50}(3, 12) &= E_{25}(3) D_e(3, 12) + 0.25 \cdot E_p(3) D_p(3, 12) c(12, 24, v) \\
&= 435.1 \cdot 1.04 + 500 \cdot 1.05 \cdot 0.95 \cdot (1 - 0.004(24 - 12)) \\
&= 452.5 + 474.81 \\
&= 927.31 \text{ e/kk},
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
E_{ve}(3, 12, 28) &= E_{50}(3, 12) D_e(12, 28) + [0.5 E_p(3) D_p(3, 28) + a(\lfloor 3 \rfloor, 28)]\, c(28, 24, v) \\
&= 927.31 \cdot 1.04 + \left[0.5 \cdot 2000 \cdot 1.05^2 + a(\lfloor 3 \rfloor, 28)\right] \cdot [0.95 \cdot (1 - 0.004(24 - 28))] \\
&= 2084.54 + a(\lfloor 3 \rfloor, 28) \cdot 1.016 \\
&= 2084.52 + 1.016 \cdot \frac{0.015}{12} \sum_{t=\lfloor 3 \rfloor}^{28} A(t) D_p(t, 28) \\
&= 2084.52 + 1.016 \cdot 78.86 \\
&= 2164.64 \text{ e/kk}.
\end{aligned}$$

Nyt henkilön oletetaan elävän 80-vuotiaaksi asti, eli hän elää vielä 228 kuukautta (19 vuotta). Tällöin hänen tulevat nettotulonsa ovat

$$N(t) = \begin{cases} 3000 - verot, & \text{kun } t < 3 \\ 435.1 D_e(3, t) + 3000 - verot, & \text{kun } 3 \leq t < 12 \\ 927.31 D_e(12, t) + 1500 - verot, & \text{kun } 12 \leq t < 28 \\ 2164.64 D_e(28, t) - verot, & \text{kun } 28 \leq t < 228 \\ 0, & \text{kun } 228 \leq t. \end{cases}$$

Nyt tuleva nettokassavirta on näiden summa nollasta 228:aan. Lisäksi nettokassavirta saataisiin diskontattua nykyhetkeen jakamalla jokaisen hetken t saatava korkoutuskertoimella $d_e(0, t)$. Eli siis kaiken kaikkiaan määritelmän (3.11) mukaisesti

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{N(t)}{d_e(0, t)}.$$

3.5 Kassavirran jakaminen osiin

Edellä muodostettu kassavirta voidaan ajatella myös toisenlaisesta näkökulmasta siten, että jaamme kassavirran komponentit erikseen eläkeosiin, ja ansiotulojen osiin. Katsomalla tarkemmin määritelmiä (3.5) ja (3.7), on helppo huomata, että myöhemmällä ajanhetkellä valittava eläke-etuus riippuu aina edeltävistä etuuksista ja niiden valintahetkistä. Itseasiassa tulkinta on vain osittain oikein. Kaikki etuudet koostuvat lopulta määritelmän (3.4) mukaisesta pohjaeläkkeestä hetkellä τ_{25} sekä vanhuuseläke lisäksi hetken $\lfloor \tau_{25} \rfloor$ jälkeisistä tuloista.

Lemma 3.13. *Tulevat eläkkeet koostuvat pohjaeläkkeen osituksesta kumulatiivisesti siten, että*

$$\begin{aligned} \textit{OVE25: } & 0.25E_p(\tau_{25}) \\ \textit{OVE50: } & 0.25E_p(\tau_{25})D_p(\tau_{25}, \tau_{50}) \\ \textit{VE: } & 0.50E_p(\tau_{25})D_p(\tau_{25}, \tau_{ve}), \end{aligned}$$

sekä ansiotulojen kartuttamista osuuksista siten, että

$$\textit{VE: } a(\lfloor \tau_{25} \rfloor, \tau_{ve}).$$

Nyt tuleva kassavirta voidaan muodostaa hieman eri tavalla siten, että maksussa oleva etuus on kumulatiivinen summa edellisistä maksussa olevista etuuksista.

Lause 3.14. *Lemman (3.13) mukaisella osituksella sekä eliniän ollessa T, tuleva bruttokassavirta diskontattuna alkuhetkeen on tällöin*

$$\begin{aligned} KV(\tau_{25}, \tau_{50}, \tau_{ve}) = & \sum_{t=t_0}^{T} \frac{A(t)}{d_e(t_0, t)} \\ & + \sum_{t=\tau_{25}}^{T} \frac{0.25E_p(\tau_{25})D_e(\tau_{25}, t)c(\tau_{25}, t_{ve}, v)}{d_e(t_0, t)} \\ & + \sum_{t=\tau_{50}}^{T} \frac{0.25E_p(\tau_{25})D_p(\tau_{25}, \tau_{50})D_e(\tau_{50}, t)c(\tau_{50}, t_{ve}, v)}{d_e(t_0, t)} \\ & + \sum_{t=\tau_{ve}}^{T} \frac{[0.50E_p(\tau_{25})D_p(\tau_{25}, \tau_{ve}) + a(\lfloor \tau_{25} \rfloor, \tau_{ve})]\, c(\tau_{ve}, t_{ve}, v)D_e(\tau_{ve}, t)}{d_e(t_0, t)}, \end{aligned}$$

missä yhäältä alas päin ensimmäinen summa kuvaa tuloja, toinen OVE25 osuuksia, kolmas OVE50 osuuksia ja neljäs VE osuuksia.

Todistus. Jätetään lukijalle. □

Luku 4

Odotettu hyöty ja optimointiongelma

Nyt tuleva eläkkeensaaja miettii millaisilla valinnoillaan eläkkeiden ja ansioiden yhteensovittaminen olisi hänen kohdallaan järkevää. Eläkkeensaajan tulee siis valita eläkkeiden alkamishetket τ_{25}, τ_{50} ja τ_{ve} siten, että hänen kokema hyöty tulevasta kassavirrasta maksimoituisi. Voisi kuvitella, että henkilö arvostaa rahaa ja varallisuutta eri tavalla eri ajanhetkinä. Todellisuudessa henkilö pyrkii maksimaalisten tulojen sijaan maksimoimaan oman hyötynsä. Matemaattisessa mielessä hyödyn määrittelevät *utiliteettifunktiot*. Niiden avulla pystymme painottamaan tuloista koettua hyötyä eri ajanhetkinä. Määrittelemme utiliteettifunktion käsitteen yleisellä tasolla, mutta emme vielä sen suuremmin ota kantaa millaisia eläkkeensaajan utiliteettifunktiot ovat.

Utiliteettifunktiomme on funktio, jonka tarkoituksena on kuvata tulojen tuomaa hyötyä tai taloudellista arvoa. Utiliteetti taas on utiliteettifunktion arvo, eli numeerisesti mallinnettu luku kuvaamaan hyötyä. Utiliteettifunktiossa itseasiassa tärkeää ei ole varsinainen arvo, vaan lähtöjoukon eri pisteiden välinen vertailu. Olkoon nyt utiliteettifunktio minkä tahansa lähtöjoukon A funktio siten, että $u : A \to \mathbb{R}$. Nyt pätee seuraavat *rationaalisuusoletukset*:

1) Jos $u(x) > u(y) \Rightarrow x \succ y$,
2) Jos $u(x) > u(z)$ ja $u(z) > u(y)$, niin $x \succ y$,

joissa $x \succ y$ tarkoittaa, että rationaalinen henkilö valitsee vaihtoehdoista (x, y) aina x.

Kun puhutaan rahasta, on selvää että *"enempi on aina parempi"*-ajatuksen on pakko päteä. Tämä tarkoittaa, että utiliteettifunktion on pakko olla aidosti kasvava. Lisäksi on perusteltua olettaa, että utiliteettifunktio on konkaavi, sillä käytössä olevan rahamäärän kasvaessa, pieni lisäys ei tuota yhtä paljoa hyötyä kuin samankokoinen lisäys puhuttaessa pienemmistä rahamääristä. Tätä kutsumme *katoavaksi rajahyödyksi.* Syvennymme tarkemmin utiliteettifunktion muotoon myöhemmin. Tässä kohtaa toteamme vain että utiliteettifunktiomme tulee olemaan aidosti kasvava konkaavi funktio $u : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

4.1 Eläkkeensaajan optimointiongelma

Tulevalla eläkkeensaajalla on valittavanaan eläke-etuuksien alkamishetket. Eläkkeiden ja työntarjonnan kautta muodostuvat nyt eläkkeensaajan tulot jokaiselle ajanhetkelle s. Lisäksi u_s on hetken s tuloja vastaava utiliteetti. Liitämme vielä mukaan valintahetken mukaisen informaation, jolloin eläkkeensaajan optimointiongelmaksi muodostuu määritelmän (3.11) mukaisen *OVE/VE-mallin* tuottaman utiliteetin maksimoiminen. Oletetaan, että työntarjonta kaikkina ajanhetkinä (riippuen onko eläkkeitä maksussa) on tunnettu, tällöin optimointiongelma hetkellä s on

$$\begin{cases} \max_\tau \mathbb{E}\left[\sum_{t=s}^K u_t\left(\frac{N(t)}{d_e(s,t)}\mathbf{1}\{T>t\}\right) \middle| \mathcal{F}_s\right] \\ \tau = \{(\tau_{25},\tau_{50},\tau_{ve}) : \tau_{25} \le \tau_{50} \le \tau_{ve} \text{ ja } \tau_{ve} \in [t_{ve},\infty)\} \end{cases} \tag{4.1}$$

missä $\mathcal{F}_s$ ehdollistaa tulevat valinnat joukkoon $T_s = \{t : t \ge s\}$. Toisaalta filtraatio sisältää myös tiedot henkilön iästä sekä kuolinhetkestä T. OVE/VE-mallin filtraatio on siis jono sigma-algebroja, jotka ovat henkilön iän ja kuolinhetken generoimia. Siis

$$\mathcal{F}_x = \sigma(x,T), \tag{4.2}$$

missä x on henkilön ikä ja T kuolinhetki.

Optimointiongelma on siis itseasiassa ajassa etenevä. Mallin maksimoiva valinta informaatiolla $\mathcal{F}_{t_0}$ on siis mahdollisesti erilainen kuin seuraavalla ajanhetkellä, jonka informaatio on $\mathcal{F}_{t_0+1}$. Tämä siksi, että seuraavalla ajanhetkellä henkilön ikä on muuttunut ja näin ollen informaatio kuolinhetkestä on lisääntynyt. Toisaalta hetkellä t_0 henkilö ei vielä tiedä selviytyvänsä seuraavaan ajanhetkeen, joten hän tekee valintoja aina olemassa olevan informaation pohjalta. Henkilö voisi siis jonain ajanhetkenä arvioida, että on optimaalista valita OVE maksuun nykyhetkellä ja valita VE jonain tulevana ajanhetkenä. Kun VEn valintahetki lähenee, henkilöllä on uusi olemassa oleva informaatio, jolloin optimaalinen VE-valinta saattaakin muuttua. Alkuhetkellä ei ole siis selvää minkälaiset valinnat henkilö lopulta tekee. Optimointiongelma siis muokkautuu aivan uuteen näkökulmaan, sillä valinnat tehdään aina olemassa olevalla informaatiolla. Onkin järkevämpää ajatella optimointiongelmaa niin, että millaiseen valintaan henkilö lopulta päätyy.

Lause 4.3. *Olkoon eläkkeensaajan optimointiongelma kuten (4.1), sekä informaatio (4.2) mukainen jono iän ja kuolinhetken generoimia sigma-algebroja. Olkoon*

$$v_s(\tau_{25},\tau_{50},\tau_{ve}) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=s}^K u_t\left(\frac{N(t)}{d_e(s,t)}\mathbf{1}\{T>t\}\right) \middle| \mathcal{F}_s\right],$$

sekä τ_{25}^s, τ_{50}^s ja τ_{ve}^s jonkin hetken s optimaaliset valinnat. Nyt siis pätee

$$\max_\tau v_s(\tau_{25}, \tau_{50}, \tau_{ve}) = v_s(\tau_{25}^s, \tau_{50}^s, \tau_{ve}^s).$$

Tällöin eläkkeensaajan lopulliset valinnat τ_{25}^*, τ_{50}^* ja τ_{ve}^* määräytyvät siten, että

$$\begin{aligned}
\tau_{25}^* &= \min\{t : (\tau_{25}^t, \tau_{50}^t, \tau_{ve}^t) = (t, \tau_{50}^t, \tau_{ve}^t)\}, \\
\tau_{50}^* &= \min\{t : (\tau_{25}^*, \tau_{50}^t, \tau_{ve}^t) = (\tau_{25}^*, t, \tau_{ve}^t)\}, \\
\tau_{ve}^* &= \min\{t : (\tau_{25}^*, \tau_{50}^*, \tau_{ve}^t) = (\tau_{25}^*, \tau_{50}^*, t)\},
\end{aligned}$$

joukossa $\{(\tau_{25}, \tau_{50}, \tau_{ve}) : \tau_{25} \leq \tau_{50} \leq \tau_{ve}$ ja $\tau_{ve} \in [t_{ve}, \infty)\}$.

Huomautus 4.4. On syytä muistaa, että lauseen (4.3) lopulliset valinnat tarkoittavat nimenomaan niitä valintoja joihin henkilö ajan edetessä lopulta päätyy, ei hetkellisiä optimaalisia valintoja!

Lauseen todistamiseksi käytämme lähteenä teosta *Optimal multiple stopping time problem* [5], jossa hieman vastaavanlaista asetelmaa käsitellään yleisellä tasolla jatkuvassa ajassa. Meidän tapauksessamme kysymys on diskreetistä ajasta sekä erikoistapauksesta, joka toteuttaa kaavan (3.1) mukaisen järjestysehdon valintahetkille.

Todistus. Merkitään

$$\Phi(\tau_{25}, \tau_{50}, \tau_{ve}) = \sum_{t=s}^{K} u_t \left(\frac{N(t)}{d_e(s,t)} \mathbf{1}\{T > t\} \right),$$

missä $\tau_{25} \leq \tau_{50} \leq \tau_{ve}$ ja $\tau_{ve} \in [0, \infty)$. Olkoon nyt τ_{25}^s, τ_{50}^s ja τ_{ve}^s jonkin hetken s mukaiset optimaaliset valinnat optimointiongelmaan (4.1), sekä v_s valintojen mukainen odotettu hyöty hetkellä s, siis

$$v_s(\tau_{25}, \tau_{50}, \tau_{ve}) = \mathbb{E}\left[\Phi(\tau_{25}, \tau_{50}, \tau_{ve}) \mid \mathcal{F}_s\right].$$

Nyt siis hetken s optimaalista valintaa vastaava odotettu hyöty on

$$v_s(\tau_{25}^s, \tau_{50}^s, \tau_{ve}^s) = \mathbb{E}\left[\Phi(\tau_{25}^s, \tau_{50}^s, \tau_{ve}^s) \mid \mathcal{F}_s\right] = \max_\tau \mathbb{E}\left[\Phi(\tau_{25}, \tau_{50}, \tau_{ve}) \mid \mathcal{F}_s\right].$$

Nyt jos $\tau_{25}^s \vee \tau_{50}^s \vee \tau_{ve}^s = s$, on selvää että henkilö aloittaa eläkkeen. Jos kuitenkin kaikki aloitushetket ovat suurempia kuin s, ei henkilö aloita eläkettä ja jää odottamaan seuraavaa ajanhetkeä $s+1$. Seuraavalla ajanhetkellä pätee nyt

$$v_{s+1}(\tau_{25}^s, \tau_{50}^s, \tau_{ve}^s) \leq v_{s+1}(\tau_{25}^{s+1}, \tau_{50}^{s+1}, \tau_{ve}^{s+1}),$$

koska $(\tau_{25}^{s+1}, \tau_{50}^{s+1}, \tau_{ve}^{s+1})$ on hetken $(s+1)$ optimaalinen valinta. Nyt koska henkilö pyrkii maksimoimaan odotetun hyödyn, rationaalisuusoletuksesta seuraa, että

$$(\tau_{25}^{s+1}, \tau_{50}^{s+1}, \tau_{ve}^{s+1}) \succ (\tau_{25}^{s}, \tau_{50}^{s}, \tau_{ve}^{s}),$$

joten hetken s optimaaliset valinnat eivät päde enää hetkellä $(s+1)$. Toisin sanoen henkilö etenee mallissa niin kauan, että löytyy jokin $n \in \mathbb{N}$, jolle pätee

$$(\tau_{25}^{s+n}, \tau_{50}^{s+n}, \tau_{ve}^{s+n}) = (s+n, \tau_{50}^{s+n}, \tau_{ve}^{s+n}).$$

Tällöin

$$v_{s+n}(\tau_{25}^{s+n}, \tau_{50}^{s+n}, \tau_{ve}^{s+n}) \geq v_{s+n}(\tau_{25}^{s+n-k}, \tau_{50}^{s+n-k}, \tau_{ve}^{s+n-k}),$$

kaikilla $k \in (0, n]$, joten

$$(\tau_{25}^{s+n}, \tau_{50}^{s+n}, \tau_{ve}^{s+n}) \succ (\tau_{25}^{s+n-k}, \tau_{50}^{s+n-k}, \tau_{ve}^{s+n-k}),$$

siis henkilön optimaalinen strategia on nyt kiinnittää valinta $\tau_{25}^* = s+n$, eli aloittaa OVE25. Lopullinen valinta τ_{25}^* on siis minimointiongelman

$$\min\{t : (\tau_{25}^t, \tau_{50}^t, \tau_{ve}^t) = (t, \tau_{50}^t, \tau_{ve}^t)\}$$

ratkaisu. Jäljellä olevat pysäytyshetket τ_{50} ja τ_{ve} valitaan tismalleen samalla logiikalla. Erona on vain se, että lopullinen valinta τ_{25}^* on jo kiinnitetty, jolloin lopullinen valinta τ_{50}^* valitaan maksimointiongelman

$$\begin{cases} \max_{\tau_{50}, \tau_{ve}} \mathbb{E}\left[\Phi(\tau_{25}^*, \tau_{50}, \tau_{ve}) \mid \mathcal{F}_s\right], \\ s \geq \tau_{25}^* \end{cases}$$

kautta, ja τ_{ve}^* maksimointiongelman

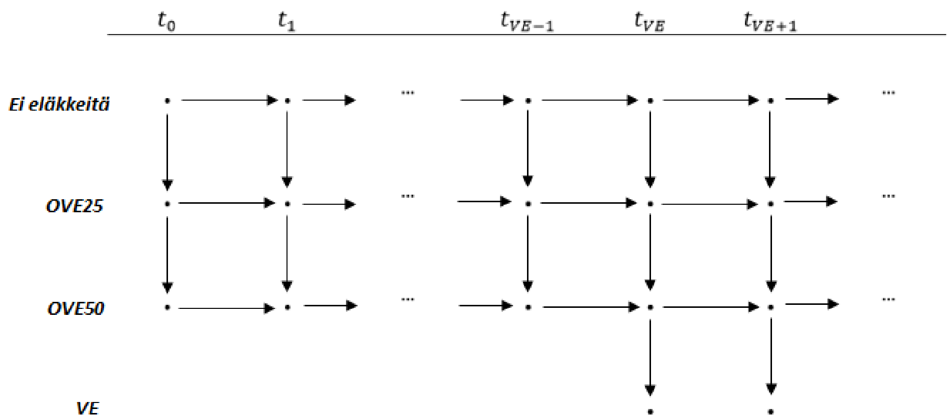
$$\begin{cases} \max_{\tau_{ve}} \mathbb{E}\left[\Phi(\tau_{25}^*, \tau_{50}^*, \tau_{ve}) \mid \mathcal{F}_s\right], \\ s \geq \tau_{50}^* \end{cases}$$

kautta. Siis lopulliset valinnat myös näille saadaan minimointiongelmista, jolloin lopulliset valinnat kokonaisuudessaan ovat

$$\begin{aligned} \tau_{25}^* &= \min\{t : (\tau_{25}^t, \tau_{50}^t, \tau_{ve}^t) = (t, \tau_{50}^t, \tau_{ve}^t)\}, \\ \tau_{50}^* &= \min\{t : (\tau_{25}^*, \tau_{50}^t, \tau_{ve}^t) = (\tau_{25}^*, t, \tau_{ve}^t)\}, \\ \tau_{ve}^* &= \min\{t : (\tau_{25}^*, \tau_{50}^*, \tau_{ve}^t) = (\tau_{25}^*, \tau_{50}^*, t)\}, \end{aligned}$$

joukossa $\{(\tau_{25}, \tau_{50}, \tau_{ve}) : \tau_{25} \leq \tau_{50} \leq \tau_{ve}$ ja $\tau_{ve} \in [t_{ve}, \infty)\}$. □

Kuten todistuksestakin voi huomata, optimaaliseen valintaan siis lopulta päädytään siten, että henkilö kiinnittää valinnan τ_{25} ensimmäisellä ajanhetkellä jona tämä on optimaalista valita. Toisin sanoen jos prosessin mukainen optimaalinen valinta τ_{25} kohdistuu nykyhetkeen, henkilö kiinnittää valintansa lopulliseksi. Mikäli valinta on vasta tulevaisuudessa, henkilö arvioi seuraavalla ajanhetkellä optimaaliset valinnat uudestaan ja jälleen joko kiinnittää valintansa tai siirtyy seuraavaan ajanhetkeen. Kun τ_{25} on valittu, henkilö suorittaa saman operaation ensin τ_{50}:lle ja lopuksi τ_{ve}:lle. Alla on vielä kuva henkilön mahdollisista siirtymisistä etuudesta toiseen edellä kuvatulla tavalla.



Kuva 4.1: Henkilön mahdolliset siirtymät eläke-etuuksien välillä

Merkille pantavaa ajan hetkien välillä on se, että henkilö arvioi kuolintodennäköisyydet eri tavalla eri ajanhetkillä. Tämä siis johtaa lopulta siihen, että lopulliset valinnat kiinnitetään aina valintahetken olemassa olevaan informaatioon nojautuen. Merkille pantavaa on myös se, että valinta johon henkilö lopulta päätyy on mahdollisten valintojen joukossa jo alkuhetkellä. Optimaalinen valinta ei täten välttämättä muutu lainkaan ajan edetessä.

Lopullisten valintojen laskeminen on varsin raskas operaatio numeerisesti laskettavaksi, joten ainut realistinen tapa toteuttaa optimointi on hyödyntää koneellista algoritmia simuloimaan henkilön valintoja ajan edetessä. Itse käytettävä ohjelmointikoodi löytyy liitteestä C.

Luku 5

Utiliteettifunktio

Kuten aikaisemmin totesimme, utiliteettifunktio on kuvaus lähtöjoukosta reaaliluvuksi joka mahdollistaa valintojen tuottaman "hyödyn" suhteellista vertailua. Ongelmana on kuitenkin se, että utiliteettifunktion täydellinen tunteminen on lähes mahdotonta mallien monimutkaistuessa. Ihmiset eivät ole samanlaisia, joten myös preferenssit voivat olla erilaisia vaikka lähtöoletuksiltaan henkilöt olisivat samanlaisia. Suuri joukko samankaltaisia henkilöitä mahdollistaa kuitenkin erilaisten estimaattien muodostamisen. Tässä joudumme nojautumaan tilastollisiin menetelmiin.

Tavoitteenamme on itseasiassa estimoida montakin utiliteettifunktiota, koska haluamme utiliteetin huomioivan henkilön iän eri ajanhetkinä. Siis tavoitteenamme on löytää utiliteettifunktiot u_t, jolloin kokonaisutiliteetti U tulee olemaan

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{t=s}^{K} u_t(x_t),$$

missä $\mathbf{x} = (x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{K-1}, x_K)$ edustaa tuloja.

5.1 Data ja estimoinnin rakenne

Utiliteettifunktion tarkoitus ei ole kuvata tarkasti yksilön preferenssejä, vaan niin sanottua keskimääräistä henkilöä. Toimivuutta voi perustella jo yksinomaan sillä, että mahdollisimman iso joukko henkilöitä toimii keskimäärin kyseisen utiliteettifunktion pohjalta.

Estimoinnissa käytettävä aineisto on peräisin *European Social Survey* [6] nimisen tutkimuskeskuksen kyselylomakkein kerätyistä vastauksista. Kyselyyn ovat vastanneet Eurooppalaiset monista eri maista. Kysymykset liittyvät laajalla kirjolla politiikkaan, omaan talouteen, koulutukseen, mielipiteisiin, mieltymyksiin, perheeseen sekä moniin muihin ihmisen elämään vaikuttaviin tekijöihin. Näistä kaikista meitä kuitenkin kiinnostaa ne muuttujat, joista voisimme analysoida henkilön tuloista kokemaa hyötyä.

Valitsemme meidän tutkimukseemme otannan suomalaisista vastaajista. Datasta valitsemme seuraavat muuttujat analysoitavaksi:

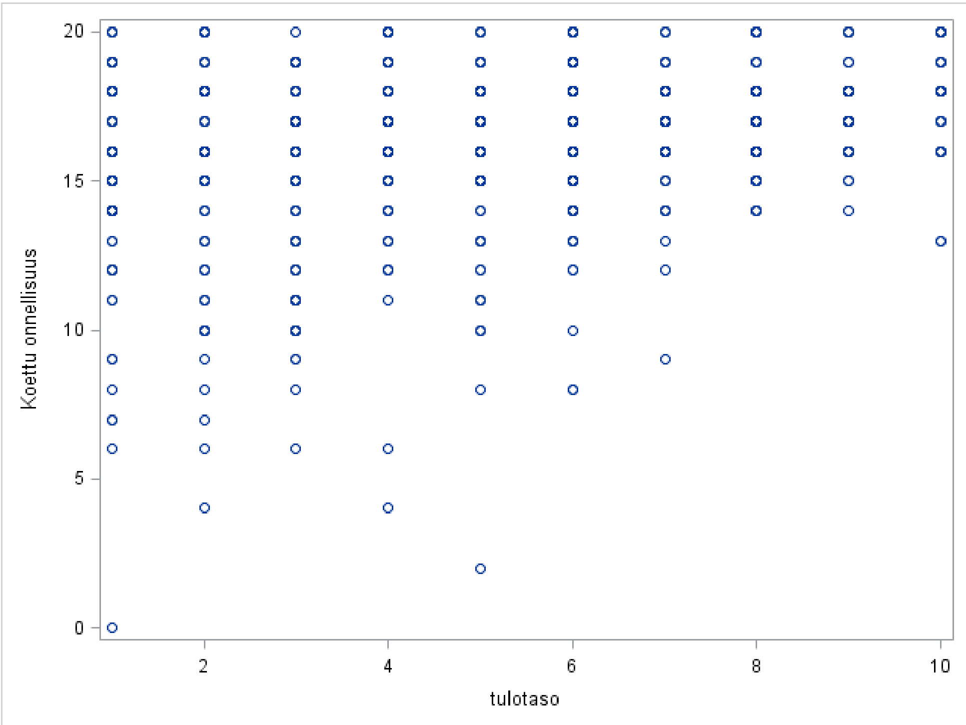
1. HINCTNTA - Kotitalouden kokonaisnettotulot
2. HAPPY - Kuinka onnellinen olet?
3. STFLIFE - Kuinka tyytyväinen olet elämään kaiken kaikkiaan?
4. AGEA - Ikä,

jossa muuttujien nimet ovat esitetty niin kuin ne ovat alkuperäisessä datassa [6].

Muuttujien 2. ja 3. vastausjakauma koostuu luvuista 1-10, jossa 1 on negatiivisin ja 10 positiivisin vaihtoehto. Hyödynnämme näitä kahta muuttujaa siten, että muodostamme niistä summamuuttujan, joka tulee tarkemmin ottaen kuvaamaan tavoittelemaamme hyötytasoa nettotulojen funktiona. Summamuuttujaa nimitämme jatkossa nimellä ONNELLISUUS, siis

$$ONNELLISUUS = HAPPY + STFLIFE.$$

Valitsimme nyt siis onnellisuuden rahasta saatavan hyödyn mittariksi. Estimoitavana on nyt siis funktio kuvaamaan onnellisuutta nettotulojen funktiona. Lisäksi haluamme toteuttaa tämän eri ikäisille henkilöille, joten myös estimointi tulee suorittaa lisäksi eri ikäisille henkilöille. Katoavan rajahyödyn nojalla voimme jo tässä kohtaa olettaa että utiliteettifunktio ei ole lineaarinen. Alla oleva kuva kaikkien vastaajien datasta tukee myös hyvin tätä näkökulmaa.



Kuva 5.1: Havainnot

Kuvasta (5.1) voidaan havaita, että tulotason kasvu näyttäisi jokseenkin kasvattavan koettua onnellisuutta. Kasvu ei kuitenkaan välttämättä ole lineaarista. Täten otamme estimoinnin lähtökohdaksi funktion, joka sopii (mahdollisen) vähenevän rajahyödyn periaatteeseen. Olkoon estimoitava funktio muotoa

$$y = \alpha z^{\beta},$$

missä z kuvaa henkilön tulokymmenystä asteikolla 1-10 ja y hyötytasoa. Nyt siis estimoitavat parametrit ovat α ja β. Tämä saadaan helposti muotoon

$$\ln(y) = \ln(\alpha) + \beta \ln(x),$$

josta α ja β ovat estimoitavissa perinteisellä lineaarisella regressiolla. Tarkemmin ottaen haluamme estimoida parametrit siten, että jokaiselle iälle on olemassa omat parametrinsa α_t ja β_t, missä t on henkilön ikä. Datan koko ei itsessään riitä siihen, että jokainen ikäluokka voitaisiin estimoida erikseen, joten joudumme muodostamaan estimaatit eri ikäryhmille. Näiden avulla voimme muodostaa iän suhteen jatkuvat funktiot parametreille.

Huomautus 5.1. Estimoinnissa käytämme poikkeuksellisesti ajanhetkinä vuosia kuukausien sijasta. Tämä kuitenkin huomioidaan ohjelmakoodissa.

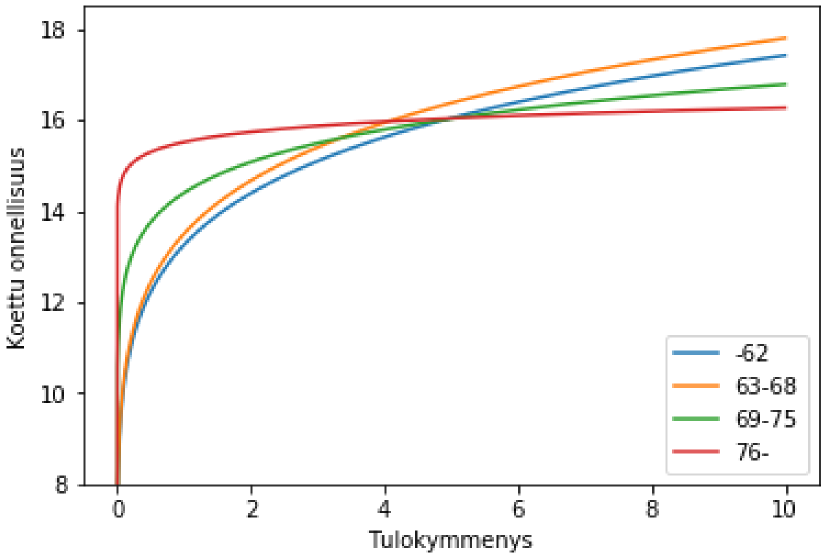
5.2 Estimoinnin tuottamia tuloksia

Ikäryhmäjako toteutetaan niin, että analysoitavat ikäryhmät ovat 58-62-vuotiaat, 63-68-vuotiaat, 69-75-vuotiaat sekä vähintään 76-vuotiaat. Estimoinnin toteutamme SAS-ohjelmistoa hyödyntäen, jossa itse lineaarinen regressio tapahtuu NLIN-proseduurilla (ohjelmakoodi liitteessä B). Estimoidut parametrit saavat seuraavanlaiset arvot:

estimaatti/ikä	-62	63-68	69-75	76-
α	13,4631	13,2686	14,394	15,5138
β	0,1126	0,1291	0,0668	0,0306

Kuva 5.2: α ja β estimaatit eri ikäisille.

Estimaattien mukaiset kuvaajat vastaavasti ovat seuraavanlaiset:



Kuva 5.3: Ikäryhmien estimoidut utiliteettifunktiot

Intuitiivisesti on havaittavissa, että iän kasvaessa parametri α kasvaa, kun taas vastaavasti β pienenee. Estimoinnin perusteella ainoa poikkeus on ikäluokka 63-68. Trendistä poikkeava havainto kyseiselle ikäluokalle voisi olla perusteltu sillä, että vuonna 2016 voimassa olleen eläkelain mukainen vanhuuseläkeikä on ollut 63-vuotta, jolloin monet kyseisen ikäryhmän henkilöt ovat jo eläkkeellä. Työsuhteen päättymisen myötä heillä on enemmän aikaa, jolloin rahan tarve vapaa-ajan toimintaan on mahdollisesti suurempi. Voi myös olla, että eläköityessään henkilöt putoavat alempaan tulokymmenykseen, mutta eivät hetkellisesti koe tämän vaikuttavan onnellisuuteen. Toisaalta tämä näyttäytynee vain hetkellisenä, sillä jo seuraavassa ikäryhmässä 69-75-vuotiailla rajahyöty alkaa vähentyä voimakkaasti. Vanhetessaan henkilöt alkavat siis preferoida enemmän muita asioita kuin rahaa, mahdollisesti terveyttä ja vapaa-aikaa. Lisäksi on myös mahdollista, että utiliteettifunktiot riippuisivat myös sukupuolesta. Koettu onnellisuus ei kuitenkaan tässä tapauksessa anna merkittäviä eroja sukupuolten välillä, joten tyydymme sukupuolille yhteisiin utiliteettifunktioihin. Emme näihin näkökulmiin pureudu sen enempää, vaan otamme estimaatit sellaisina kuin ne ovat. Haluamme kuitenkin saada parametreille iän suhteen jatkuvat funktiot, jotka istuvat hyvin estimaatteihin. Tämän saamme aikaiseksi sovittamalla α ja β pisteet polynomifunktioiksi

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3,$$

missä t on henkilön ikä. Nyt vakiot c_i ratkeavat parametrille α yhtälöryhmästä

$$\begin{bmatrix} 13.4631 \\ 13.2686 \\ 14.3940 \\ 15.5138 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 60 & 60^2 & 60^3 \\ 1 & 65 & 65^2 & 65^3 \\ 1 & 72 & 72^2 & 72^3 \\ 1 & 80 & 80^2 & 80^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

pienimmän neliösumman menetelmällä. Iät 60, 65 ja 72 ovat valittu likimain ikäryhmien vastaajien keskiarvoina. Pääteikä 80 on taas valittu sopivasti, jolloin sovitefunktio saadaan istumaan pisteisiin hyvin. Toisaalta tätä vanhempien henkilöiden parametrit ovat joka tapauksessa vaikea arvioida tarkemmin, koska vanhempia vastaajia on varsin niukasti. Tämä myös rajaa pois mahdollisuuden parametrien rajattomalle kasvulle/pienenemiselle. Tyydymme siis käyttämään yli 80-vuotiaille vastaavan ikäryhmän estimoituja parametreja, ja tätä nuoremmille sovitefunktiolla muodostettuja parametreja. Vastaava tehdään myös estimaateille β. Kootaan nyt tulokset määritelmäksi. Ensin annamme kuitenkin määritelmän tulokymmenykselle, jonka kautta muodostuu itse utiliteettifunktio.

Määritelmä 5.2. Olkoon a henkilön tulot, ja vastaava tulokymmenys z. Tällöin tuloja vastaava tulokymmenys määritellään kuten lähteessä [6], mutta huomioiden että vastaajien keskimääräinen talouden koko oli 1,6271. Yksittäisen henkilön euromääräisiä nettokuukausituloja vastaava tulokymmenys on siten

$$z(a) = \begin{cases} 0 \text{ kun } a = 0 \\ 1 \text{ kun } a \in (0, 687] \\ 2 \text{ kun } a \in (687, 848] \\ 3 \text{ kun } a \in (848, 1078] \\ 4 \text{ kun } a \in (1078, 1335] \\ 5 \text{ kun } a \in (1335, 1631] \\ 6 \text{ kun } a \in (1631, 1980] \\ 7 \text{ kun } a \in (1980, 2367] \\ 8 \text{ kun } a \in (2367, 2824] \\ 9 \text{ kun } a \in (2824, 3520] \\ 10 \text{ kun } a \in (3520, \infty]. \end{cases}$$

Määritelmä 5.3. *Eläkkeensaajan utiliteettifunktio.* Olkoon t-ikäisen henkilön nettotulot a ja z nettotuloja vastaava tulokymmenys. Tällöin t-ikäisen henkilön nettotulojen funktiota u_t kutsutaan eläkkeensaajan utiliteettifunktioksi, jolle pätee

$$u_t(a) = \alpha_t z(a)^{\beta_t},$$

jonka parametrit α_t ja β_t saadaan kaavoista

$$\alpha_t = \begin{cases} c_0^\alpha + c_1^\alpha t + c_2^\alpha t^2 + c_3^\alpha t^3, & \text{kun } t < 80 \\ c_0^\alpha + c_1^\alpha 80 + c_2^\alpha 80^2 + c_3^\alpha 80^3, & \text{kun } t \geq 80 \end{cases},$$

$$\beta_t = \begin{cases} c_0^\beta + c_1^\beta t + c_2^\beta t^2 + c_3^\beta t^3, & \text{kun } t < 80 \\ c_0^\beta + c_1^\beta 80 + c_2^\beta 80^2 + c_3^\beta 80^3, & \text{kun } t \geq 80 \end{cases},$$

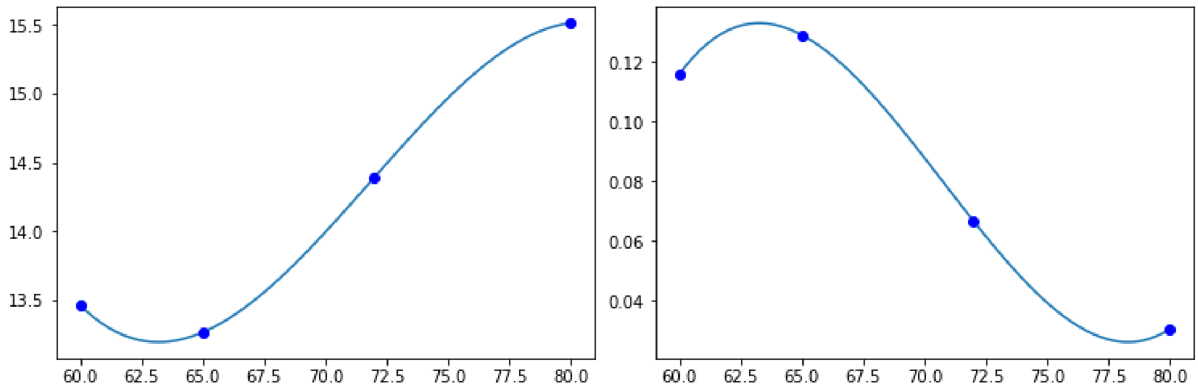
missä

$$\mathbf{c}^\alpha = \begin{bmatrix} c_0^\alpha \\ c_1^\alpha \\ c_2^\alpha \\ c_3^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 333.771 \\ -13.7454 \\ 0.194193 \\ -0.000901286 \end{bmatrix}$$

ja

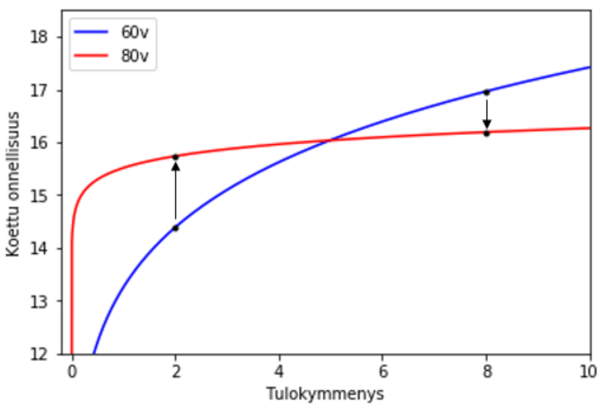
$$\mathbf{c}^\beta = \begin{bmatrix} c_0^\beta \\ c_1^\beta \\ c_2^\beta \\ c_3^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21.3586 \\ 0.929945 \\ -0.0132889 \\ 0.0000625833 \end{bmatrix}.$$

Määritelmän parametrien havainnollistamiseksi alla on vielä kuva, jossa näkyy estimoitujen pisteiden avulla muodostetut jatkuvat funktiot sekä näiden käyrillä vielä funktioiden lähtökohdaksi otetut estimoidut pisteet.



Kuva 5.4: Parametrit iän funktiona, vasemmalla α ja oikealla β.

Kaiken kaikkiaan estimoidut utiliteettifunktiot vaikuttavat melko johdonmukaisilta: Mitä vanhemmaksi ihminen tulee, sitä vähemmän raha tuottaa lisähyötyä. Lisäksi on havaittavissa, että iän mittaan pienissä tuloluokissa absoluuttinen hyötytaso nousee tulojen pysyessä vakiona, kun taas vastaavasti suurilla tulotasoilla absoluuttinen hyötytaso laskee. Numeeristen tulosten kannalta vaikuttaisikin siis siltä, että pienen tulotason henkilön on fiksumpaa "elää hetkessä", koska tulevaisuuden tulotasolla ei ole suurta merkitystä hänelle. Vastaavasti suurituloisen on syytä painottaa tulevaisuutta, jottei hänen hyötytasonsa romahda nykyhetken pienen marginaalihyödyn lisäyksen kustannuksella.



Kuva 5.5: Utiliteetin muutos kun tulokymmenys vakio

Luku 6

Optimointiongelman ratkaiseminen

6.1 Laskennallisia apuvälineitä

Ennen numeerisia tuloksia käymme hieman läpi asioita, jotka helpottavat numeerista laskemista algoritmilla.

Utiliteetin odotusarvo

Utiliteettifunktio on nyt siis muotoa $u(a) = \alpha z(a)^\beta$, jolloin yleiselle a odotusarvo

$$\mathbb{E}\left(\alpha z(a)^\beta\right) = \alpha \int z(a)^\beta \, d\mathbb{P}$$

tuottaisi laskennallisia haasteita eksponentin β, ja suhteellisen monimutkaisen todennäköisyysmitan takia. Itseasiassa osoittautuukin, että mallissamme oleva indikaattorifunktio helpottaa tilannetta huomattavasti.

Lemma 6.1. *OVE/VE-mallissa (3.11) yksittäisen kuukauden nettotulojen utiliteetin odotusarvo saadaan muotoon*

$$\mathbb{E}\left[u\left(\frac{N(t)}{d_e(x,t)}\mathbf{1}\{T > t\}\right)\right] = \alpha\left(z\left(\frac{N(t)}{d_e(x,t)}\right)\right)^\beta \mathbb{P}(T > t).$$

Todistus. Hyödyntämällä odotusarvon lineaarisuutta, indikaattorifunktion potenssin kumoutumista sekä indikaattorifunktion odotusarvoa, suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u\left(\frac{N(t)}{d_e(x,t)}\mathbf{1}\{T>t\}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\alpha\left(z\left(\frac{N(t)}{d_e(x,t)}\mathbf{1}\{T>t\}\right)\right)^{\beta}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\alpha\left(z\left(\frac{N(t)}{d_e(x,t)}\right)\mathbf{1}\{T>t\}\right)^{\beta}\right] \\
&= \alpha\left(z\left(\frac{N(t)}{d_e(x,t)}\right)\right)^{\beta}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}\{T>t\}^{\beta}\right) \\
&= \alpha\left(z\left(\frac{N(t)}{d_e(x,t)}\right)\right)^{\beta}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}\{T>t\}\right) \\
&= \alpha\left(z\left(\frac{N(t)}{d_e(x,t)}\right)\right)^{\beta}\mathbb{P}\left(T>t\right),
\end{aligned}$$

missä toisella rivillä indikaattorifunktio voitiin siirtää tulotasofunktion z ulkopuolelle, koska millä tahansa nettotulolla a pätee

$$z\left(a\mathbf{1}\{T>t\}\right) = \begin{cases} 0 & \text{jos } t \geq T \\ z(a) & \text{jos } t < T, \end{cases}$$

ja vastaavasti

$$z\left(a\right)\mathbf{1}\{T>t\} = \begin{cases} 0 & \text{jos } t \geq T \\ z(a) & \text{jos } t < T. \end{cases}$$

□

TyEL-kuolevuus ja elossaolotodennäköisyys

Lemma 6.2. *Liitteen A.3 mukaiselle TyEL-kuolevuudelle pätee, että x-ikäinen elää vähintään $(x+t)$-ikäiseksi todennäköisyydellä*

$${}_tp_x = \mathbb{P}(T \geq x+t \mid T > x) = \exp\left(\frac{1}{a_2}(\mu_x - \mu_{x+t})\right),$$

missä a_2 on liitteen A.3 mukainen vakio.

Todistus. Sijoittamalla liitteen A.3 mukainen TyEL-kuolevuus lauseen 2.8 elossa olotodennäköisyyden kaavaan, saadaan suoraan laskemalla

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+u}\, du\right) \\
&= \exp\left(-\int_0^t a_1 e^{a_2(x+u+b_2)}\, du\right) \\
&= \exp\left(-a_1 e^{a_2(x+b_2)} \int_0^t e^{a_2 u}\, du\right) \\
&= \exp\left(-a_1 e^{a_2(x+b_2)} \left(\frac{e^{a_2 t}}{a_2} - \frac{1}{a_2}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{a_2}\left(a_1 e^{a_2(x+b_2)} - a_1 e^{a_2(x+t+b_2)}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{a_2}(\mu_x - \mu_{x+t})\right).
\end{aligned}
$$

□

Diskonttaus

Lemma 6.3. *Diskonttotekijälle $d_e(s,t)$ pätee*

$$d_e(s,t) = \exp\left(\ln(1+i_e)(t-s)\right)),$$

missä i_e on liitteen A.2 mukainen eläkeindeksin vakio kasvuvauhti.

Todistus. Vuosittaisen eläkeindeksin ollessa i_e, sitä vastaava korkoutuvuus δ on lauseen 2.10 mukaisesti $ln(1+i_e)$. Tällöin kiinteällä i_e diskonttotekijäksi saadaan yksinkertaisesti

$$
\begin{aligned}
d_e(s,t) &= \exp\left(\int_s^t \delta(u)\, du\right) \\
&= \exp\left(\int_s^t \ln(1+i_e)\, du\right) \\
&= \exp\left(\ln(1+i_e)\int_s^t du\right) \\
&= \exp\left(\ln(1+i_e)(t-s)\right)).
\end{aligned}
$$

□

Verotus

Eläkkeistä ja ansioista riippuva verofunktio $v(E(t), A(t))$ muodostetaan yksinkertaistamalla. Tutkimuksen tarkoituksena ei ole pureutua verotuksen maailmaan sen tarkemmin, joten käytämme veroihin yksinkertaistettua mallia. Hetken t verojen määrä määritellään nyt kaavalla

$$v(E(t), A(t)) = E(t)v_E\left(E(t) + A(t)\right) + A(t)v_A(E(t) + A(t)),$$

missä v_E on eläkettä, ja v_A ansioita vastaava keskimääräinen veroprosentti tulojen kokonaismäärän funktiona $E + A$. Tarkemmat perustelut löytyvät liitteestä A.4.

OVE/VE-malli ja utiliteetin odotusarvo

Nyt kaikkien komponenttien ollessa selkeästi tiedossa, voimme kasata OVE/VE-mallin mukaisen kassavirran hyödyn odotusarvon aukilaskettuun muotoon.

Lause 6.4. *Olkoon OVE/VE-malli kuten määritelmässä (3.11), sekä utiliteettifunktio ja sen parametrit määritelmän (5.3) mukaisia. Tällöin lemmojen (6.1), (6.2) ja (6.3) avulla OVE/VE-mallin mukaisten kuukausittaisten tulojen hyödyn odotusarvo hetkellä x on*

$$\sum_{t=x}^{\infty} \alpha_{t/12} \left(z \left(\frac{E(t) + A(t) - v(E(t), A(t))}{\exp\left(\ln(1 + i_e)\left(\frac{t-x}{12}\right)\right)} \right) \right)^{\beta_{t/12}} \exp\left(\frac{\mu_{x/12} - \mu_{t/12}}{a_2} \right),$$

missä $E(t)$ ja $A(t)$ määräytyvät valintahetkien τ_{25}, τ_{50} ja τ_{ve} mukaisesti.

Todistus. Jätetään lukijalle. Johdettavissa helposti suoraan lemmoista (6.1), (6.2) ja (6.3). □

Iterointi

Ongelman ratkaiseminen suoraan iteroinnilla on siinä mielessä ongelmallinen, että suoritettavien toistojen määrä on laskennallisesti erittäin raskas. Jotta voimme rajoittaa niin sanotut "turhat" iteroinnit pois, on syytä tarkastella algoritmin rakennetta. Ennen valinnan τ_{25} kiinnittämistä laskenta on kaikkein raskainta, sillä iteroitavia dimensioita on 2. Rationaalisuusoletuksesta seuraa, että jos on olemassa yksikin valinta $(\tau_{25}, \tau_{50}, \tau_{ve})$, missä $\tau_{25} > t_0$, ei rationaalinen henkilö kiinnitä valintaa $\tau_{25} = t_0$. Toisin sanoen loput iteroinnit ovat turhia, jolloin voidaan siirtyä suoraan seuraavaan ajanhetkeen tarkastelemaan henkilön optimaalista valintaa hetkellä $t_0 + 1$. Kun optimointihetkeä vastaava utiliteetin odotusarvo maksimoituu sellaisella valinnalla, jossa τ_{25} vastaa nykyhetkeä, kyseinen valinta kiinnitetään. Tämän jälkeen loput iteroinnit suoritetaan etsien optimaalista τ_{50}, jolloin tarvittavat iteroinnit ovat vähentyneet huomattavasti. Edellä mainittu tapa iteroida valintahetkiä on osana laskenta-algoritmia, joka löytyy liitteestä C.

6.2 Numeeriset tulokset

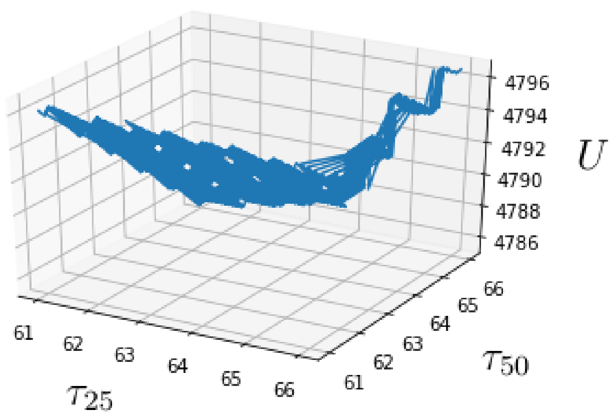
Tulemme nyt suorittamaan laskennan muutamalle erilaiselle henkilöprofiilille, jotka eroavat sukupuolen, pohjaeläkkeen ja ansiotulojen kautta. Sukupuolia tarkastellaan erikseen sillä miesten ja naisten kuolevuus on erilainen, jolloin tuloksissakin voisi olettaa olevan eroa. Lisäksi osoitimme, että tulojen rajahyöty on laskeva, jolloin myös erilaisia lähtötilanteita pohjaeläkkeelle on syytä tarkastella. Lisäksi progressiivinen verotus vaikuttaa todennäköisesti lopullisiin valintoihin. Kriteeriksi otetaan myös eri VEn aloitushetket, koska mitä kauempana VEn aloitus on alimmasta vanhuuseläkeiästä, sitä enemmän lykkäyskorotus vaikuttaa vanhuuseläkkeen määrään. On myös perusteltua suhteuttaa pohjaeläkkeen ja ansioiden suuruusluokkaa. Yleisesti ottaen eläkkeen määrä on noin 50-60% ansiotulojen määrästä, joten käytämme tätä oletuksena. Näiden lisäksi suoritamme laskennan myös erikseen 1958-syntyneiden ja 1962-syntyneiden ikäluokille. Tämä siitä syystä, että ikäluokkien kuolevuudet ovat erilaiset.

6.2.1 1958 syntyneiden ikäluokka

Suoritetaan seuraavaksi optimointi 1958 syntyneiden ikäluokalle. Tämän ikäluokan alin OVE-ikä on 61-vuotta ja alin vanhuuseläkeikä 64-vuotta. Asetetaan vaihtoehdoiksi eri suuruiset pohjaeläke-ansiotulo suuruusluokat ja vanhuuseläkkeen kiinteäksi alkamisiäksi 64-, 65- tai 66-vuotta. Tulokset sukupuolittain löytyvät seuraavista taulukoista. Ensimmäisenä on miesten taulukko.

Sukupuoli	VE-aloitus	Pohjaeläke	Ansiotulot	OVE25*	OVE50*
M	64v	1800e	3000e	-	63v 1kk
M	64v	2500e	4166e	61v 0kk	63v 10kk
M	64v	3000e	5000e	-	62v 2kk
M	64v	3500e	6000e	63v 9kk	-
M	65v	1800e	3000e	61v 2kk	62v 0kk
M	65v	2500e	4166e	61v 0kk	-
M	65v	3000e	5000e	-	61v 1kk
M	65v	3500e	6000e	63v 10kk	-
M	66v	1800e	3000e	61v 0kk	62v 0kk
M	66v	2500e	4166e	63v 8kk	-
M	66v	3000e	5000e	65v 9kk	65v 10kk
M	66v	3500e	6000e	64v 0kk	65v 11kk

Havaitsemme ensimmäiseksi, että VE-aloituksien kasvaessa, myös mahdolliset OVEn aloitushetket kasvavat melko systemaattisesti. Toisin sanoen ansioiden ja OVEn yhdistäminen pidemmäksi aikaa (kun VE-aloitus kasvaa) ei riitä kumoamaan varhennusvähennyksen vaikutusta sekä myöhemmin maksettavan vanhuuseläkkeen pienenemistä. Toisaalta pienimmällä tulotasolla tulos on täysin päinvastainen. Tämä voisi olla perusteltua sillä, että pienellä pohjaeläkkeen tasolla henkilö alkaa preferoimaan lisätuloa tulevan vanhuuseläkkeen kustannuksella enemmän ja enemmän kun vanhuuseläkkeellä oloaika lyhenee (koska kuolinhetki ei muutu). On myös mahdollista, että lykkäyskorotus mahdollistaa eläketason ylläpidon, jolloin aikaisemman OVEn aiheuttama varhennusvähennys ei pääse pienentämään VEn tasoa. Jos taas VE aloitetaan 65-vuotiaana, näyttäisi OVEn aloitushetket olevan 3000 euron pohjaeläkkeen omaavaalla profiililla matalimmillaan. Tämä on mahdollisesti seurausta siitä, että VEn aloitus pitenee juuri sen verran, että henkilö preferoi enemmän ylimääräiseksi vuodeksi saatavaa lisätuloa kuin pienempää varhennusvähennystä. Esimerkkinä nyt tämä 3000 euron pohjaeläkkeen omaava mies, jolla OVEn aloitukset putoavat melko merkittävästi kun VE aloitetaan 64-vuoden sijasta 65-vuotiaana.



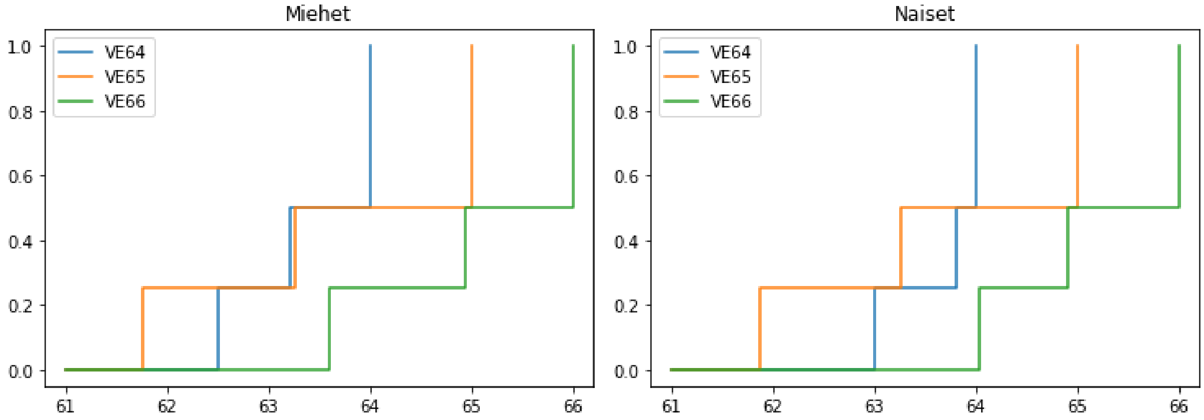
Kuva 6.1: Hyötytasot (U) eri OVE-valinnoilla (τ_{25} ja τ_{50})

Kuvasta voi havaita, että kyseinen henkilö itseasiassa puntaroi ääripäiden välillä, eli aikaisten ja myöhäisten OVE-valintojen välillä. Näyttäisikin siltä, että OVEn aloitus nuorempana on juuri ja juuri optimaalisempi vaihtoehto.

Seuraavaksi suoritamme simuloinnin samoilla oletuksilla naisille. Ainut ero naisilla on vain se, että heidän kuolevuutensa on erilainen kuin miehillä.

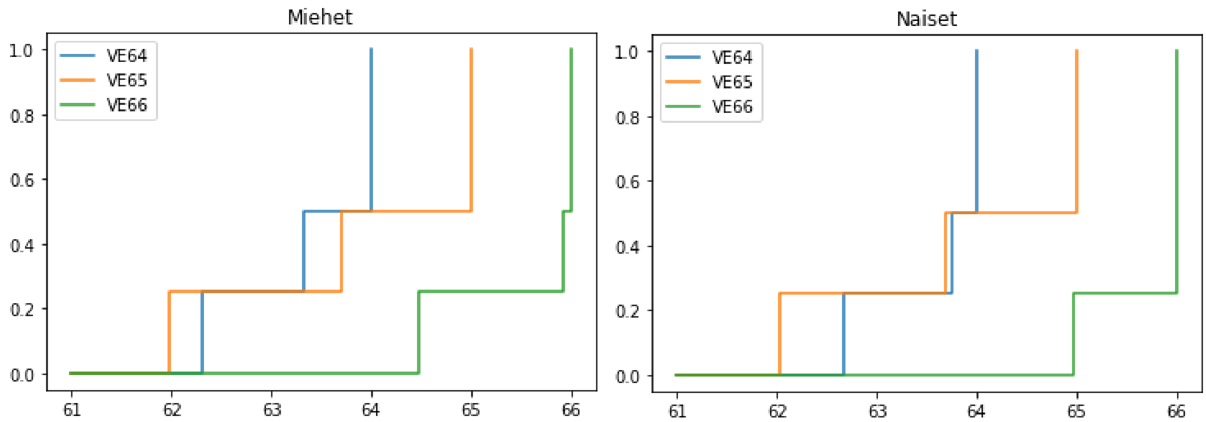
Sukupuoli	VE-aloitus	Pohjaeläke	Ansiotulot	OVE25*	OVE50*
N	64v	1800e	3000e	-	-
N	64v	2500e	4166e	61v 0kk	63v 11kk
N	64v	3000e	5000e	63v 3kk	63v 4kk
N	64v	3500e	6000e	63v 9kk	-
N	65v	1800e	3000e	61v 5kk	62v 0kk
N	65v	2500e	4166e	61v 0kk	-
N	65v	3000e	5000e	-	61v 1kk
N	65v	3500e	6000e	64v 0kk	-
N	66v	1800e	3000e	61v 3kk	61v 8kk
N	66v	2500e	4166e	65v 1kk	-
N	66v	3000e	5000e	65v 10kk	-
N	66v	3500e	6000e	64v 0kk	-

Naisilla tuloksissa on huomattavissa hyvin samankaltainen trendi. Poikkeuksena jälleen pienituloisimmat ja osittain myös 65-vuotiaana VEn aloittavat, joilla kehitys miesten tavoin päinvastainen. Merkittävin ero nyt miehiin on se, että naiset valitsevat jokaisessa tapauksessa OVEn samaan aikaan tai myöhemmin maksuun kuin miehet. Selittävä tekijä on naisten alhaisempi kuolevuus, eli heidän elinajanodote on korkeampi kuin miehillä. Tämä vaikuttaa suoraan elossaolotodennäköisyyksiin naisten eduksi. Useassa tapauksessa naisilla jää myös kokonaan 50-prosentin OVE käyttämättä. Tämäkin on merkki siitä, että naiset mielummin hyödyntävät lykkäyskorotuksen suuremmissa määrin, koska he odottavat elävänsä pidempään. He siis preferoivat miehiä enemmän vanhuuseläkettä kuin nykyhetkeä. Alla on vielä kuvaajat keskimääräisille OVE valinnoille sukupuolittain sekä eri VEn aloitushetkillä, jossa ensimmäinen hyppy tarkoittaa 25-prosentin OVEa, toinen 50-prosentin OVEa ja kolmas VEtä.



Kuva 6.2: Keskimääräiset valinnat 1958-syntyneille.

Kuvasta on nyt helppo havaita molemmille sukupuolille, että verrattuna 64-vuotiaina VEn aloittaviin, 65-vuotiaana VEn aloittavat ottavat OVEt maksuun aikaisemmin ja 66-vuotiaana VEn aloittavat taas myöhemmin. Lisäksi naisten valinnat painottuvat selkeästi lähemmäksi VEn aloitusta kuin miehillä, lukuunottamatta 65-vuotiaana VEn aloittavia, joilla keskimääräiset OVEn aloitukset ovat lähes samat. Kuvassa (6.2) on kuitenkin mukana vielä pienituloisimmat, joilla trendi valinnoissa oli täysin päinvastainen. Nyt muodostamme vielä kuvan keskimääräisistä valinnoista ilman pienituloisimpia.



Kuva 6.3: Keskimääräiset valinnat 1958-syntyneille ilman pienituloisia.

Kuvasta voimme nyt havaita, että 66-vuotiaana VEn aloittavilla OVE valinnat painottuvat erittäin voimakkaasti kohti VEn aloittamishetkeä. Toisaalta keskimääräisten OVE-valintojenkaan lasku 65-vuotiaina VEn aloittavilla verrattuna 64-vuotiaana VEn aloittaviin ei näyttäydy enää kovinkaan merkittävänä. Miehillä keskimääräinen 50-prosentin OVEn aloitus itseasiassa kasvaa hieman. Edelleen on kuitenkin havaittavissa, että miehet valitsevat keskimäärin naisia aikaisemmin OVEn maksuun, lukuunottamatta 65-vuotiaana VEn aloittavia, joilla keskimääräiset OVE-aloitukset ovat lähes samat.

Yleisesti ottaen vaikuttaisi siis siltä, että kaikilla tuloluokilla VEn aloituksen siirtyessä 64:stä 65:een OVE-aloitukset laskevat hieman tai pysyvät lähes samana. Tämän voisi perustella sillä, että VEn aloittamisen viivästyessä hieman, eläkkeensaajat haluavat hyödyntää OVEa enemmän hetkellisen tulotason nostoon. Toisaalta tällöin myös myöhäisempi VEn aloitus kompensoi lykkäyskorotuksen kautta hieman aikaisemman OVEn aiheuttamaa varhennusvähennystä. 66-vuotiaana VEn aloittaminen taas vaikuttaa niin, että OVEn aloittamiset nousevat keskimäärin. Syy saattanee olla siinä, että VEn lykkäyskorotusta on mahdollista hyödyntää merkittävästi pidemmän aikaa. Tällöin myös OVEn aloittamista lykätään enemmän, jolloin tuleva VE saa merkittävämmän korotuksen. Kuten aiemminkin todettiin, utiliteetin rajahyöty on melko pieni henkilön ollessa yli 80-vuotias, joten tulos ei ole intuitiivisesti täysin selvä. Tulokset toisaalta osoittavat osaltaan sen, että esimerkiksi ikävälillä 66-75v eläkkeen määrällä on vielä sen verran merkitystä, että eläkkeensaaja ei preferoi pelkästään nykyhetkeä.

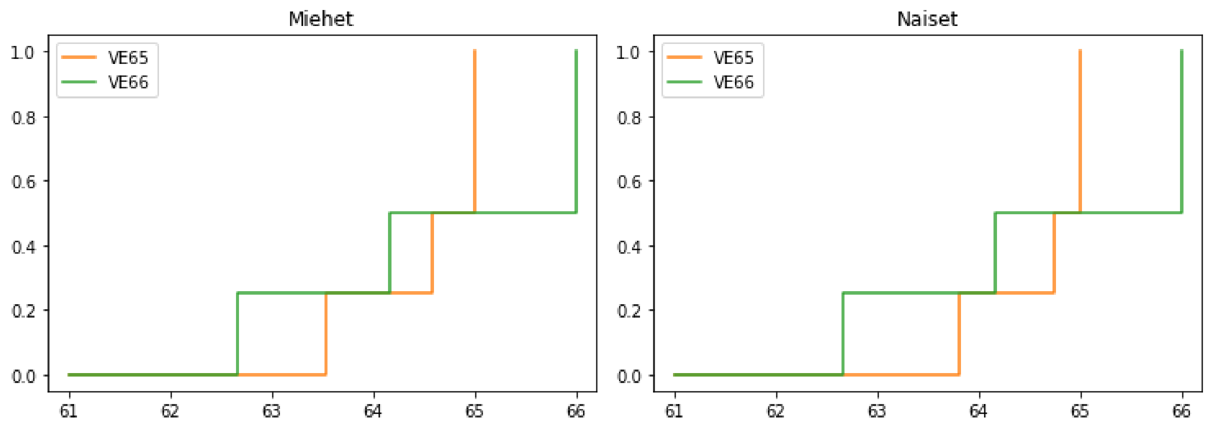
6.2.2 1962 syntyneiden ikäluokka

Toinen tutkittava ikäluokka on 1962-syntyneet. Heidän alin OVE-ikä on 61 vuotta ja alin VE-ikä 65 vuotta sekä ETK:n ennuste elinaikakertoimesta 0.934. Liitteen A.3 mukainen b_2 parameri saa tälle kohortille arvon -2. Tämä siis tarkoittaa että tämän ikäluokan kuolevuus on matalampi kuin 1958-syntyneiden ikäluokalla. Ajatellaan tämä ikäluokka nyt alimpaan OVE-ikään eli 61-vuotiaiksi. Heidän lopullinen strategia on esitetty alla olevissa taulukoissa:

Sukupuoli	**VE-aloitus**	**Pohjaeläke**	**Ansiotulot**	**OVE25***	**OVE50***
M	65v	1800e	3000e	-	-
M	65v	2500e	4166e	61v 0kk	64v 6kk
M	65v	3000e	5000e	-	64v 0kk
M	65v	3500e	6000e	64v 2kk	-
M	66v	1800e	3000e	-	63v 5kk
M	66v	2500e	4166e	61v 0kk	65v 0kk
M	66v	3000e	5000e	-	62v 3kk
M	66v	3500e	6000e	64v 0kk	-

Sukupuoli	VE-aloitus	Pohjaeläke	Ansiotulot	OVE25*	OVE50*
N	65v	1800e	3000e	-	-
N	65v	2500e	4166e	61v 3kk	-
N	65v	3000e	5000e	-	64v 0kk
N	65v	3500e	6000e	-	-
N	66v	1800e	3000e	-	63v 5kk
N	66v	2500e	4166e	61v 0kk	65v 0kk
N	66v	3000e	5000e	-	62v 3kk
N	66v	3500e	6000e	64v 0kk	-

Taulukoista voi havaita, että naiset valitsevat joissakin tapauksissa OVEn miehiä hieman myöhemmin. Toisaalta sukupuolten väliset erot eivät ole niin suuria kuin 1958-syntyneiden ikäluokalla. Monissa tapauksissa alkaa myös näkyä etuuksien käyttämättömyys, eli useimmissa tapauksissa vähintään toista etuutta ei hyödynnetä lainkaan. Lisäksi on silmiin pistävää, että ne henkilöt, jotka valitsevat 25-prosentin OVEn aikaisemmin päätyvät valitsemaan 50-prosentin OVEn lähes poikkeuksetta erittäin myöhään, tai eivät käytä 50-prosentin OVEa lainkaan. Nyt otamme jälleen keskimääräiset OVEn aloitushetket sukupuolittain eri VEn aloituksilla.



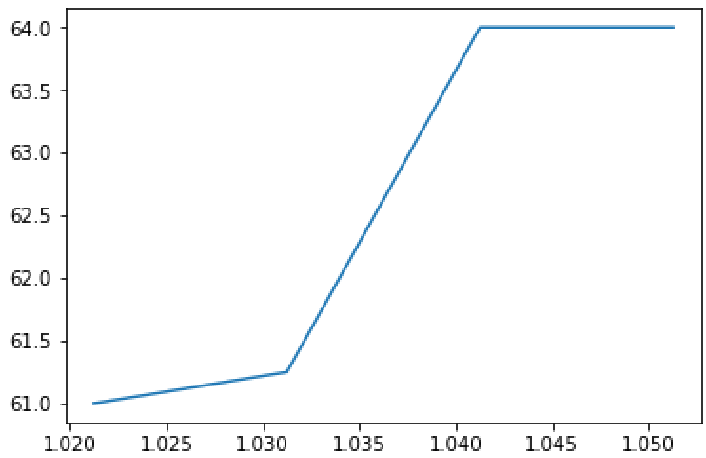
Kuva 6.4: Keskimääräiset valinnat 1962-syntyneet

Nyt voi havaita, että 25-prosentin OVEt ovat maksussa yleisesti ottaen hieman pidemmän aikaa kuin 1958-syntyneillä (vrt. kuva 6.2). Tosin asetettaessa VEn aloitus yhden vuoden päähän alimmasta VE-iästä, keskimääräiset valinnat taas laskevat verrattuna henkilöihin, jotka aloittavat VEn alimmassa VE-iässä. Merkittävä ero aikaisemmasta poiketen on, että 66-vuotiaana VEn aloittavat naiset valitsevat OVEt keskimäärin lähes samaan aikaan kuin 66-vuotiaana VEn aloittavat miehet. Toisaalta 65-vuotiaana VEn aloittavilla sukupuolten välillä on eroa. Joka tapauksessa naisten valinnat laskevat suhteessa enemmän kuin miesten. Lisäksi VEn alkaessa alimmassa vanhuuseläkeiässä tai vuoden tämän jälkeen, näyttävät valinnat olevan merkittävästi suurempia kuin 1958-syntyneillä.

6.2.3 Korkotason vaikutus

Kiinnostavaa on myös miten korko vaikuttaa valintoihin. Suuri palkkakertoimen kasvu suhteessa eläkeindeksin kasvuun tarkoittaa siis, että maksussa oleva eläke kasvaa suhteessa hitaammin kuin vastaava ei-maksussa oleva eläkekertymä. Tämän voisi kuvitella ajavan OVE-valintoja yhä lähemmäksi vanhuuseläkkeen alkamista. Pienet muutokset koroissa eivät kuitenkaan kuvaa sensitiivisyyttä tarpeeksi tarkasti, sillä tulokymmenykset ovat tutkimuksessamme nettotuloista muodostettuja välejä.

Otetaan esimerkkinä 1958-syntynyt nainen, jonka pohjaeläke on 2500 e/kk ja ansiotulot 4166 e/kk alkuhetkellä. Pidämme eläkeindeksin kasvun vakiona, mutta muutamme palkkakertoimen kasvua prosentti kerrallaan ylöspäin. 50-prosentin OVEn aloitus pysyttelee koko ajan VEn aloitushetkessä (64v), mutta 25-prosentin OVEn aloitus kasvaa palkkakertoimen kasvua korottaessa. Alussa muutos on varsin pientä, mutta suurempi hyppy tapahtuu kun palkkakertoimen kasvu on 3.2% ja 4% välissä. Tämän jälkeen valinnat painautuvat väkisin VEn aloitushetkeen.

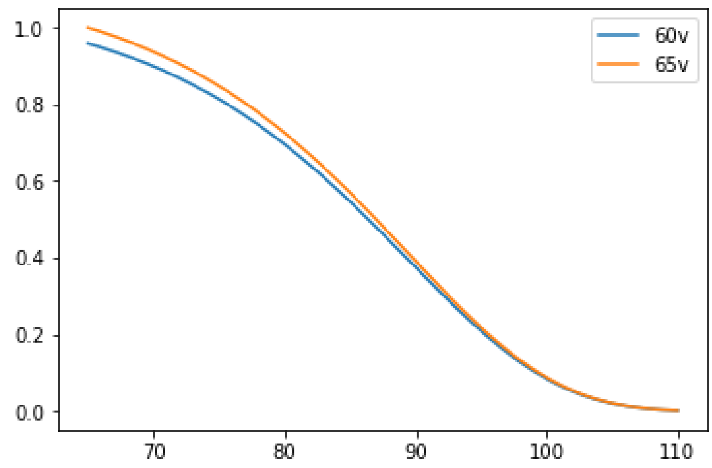


Kuva 6.5: Palkkakertoimen kasvun vaikutus OVE25:een 1958-syntyneellä miehellä

Muutamalla muulla 1958-syntyneen miehen henkilöprofiililla testattuna, valinnoissa tapahtuu hieman vastaavanlainen muutos. Toisaalta esimerkiksi suuremmalla pohjaeläke-ansiotulo parilla valintojen kasvu tapahtuu maltillisemmin. Tämä on perusteltua sillä, että suurempituloisen rajahyöty on pienempi.

6.2.4 Pohdintaa dynaamisesta mallista

Edelliset tulokset tarkoittavat nimenomaan henkilön lopullisia valintoja, joihin henkilö ajan edetessä päätyy. Kiinnostava kysymys onkin tässä kohtaa, että millä tavoin dynaaminen malli vaikuttaa henkilön lopullisiin valintoihin ajan edetessä. Vastaus on valitettavasti: ei juurikaan. Parhaan hetkellisen optimin mukainen käyttäytyminen ajan edetessä on täysin perusteltua rationaaliselle henkilölle, mutta näyttää siltä että optimaaliset valinnat ajan edetessä eivät juurikaan muutu. Tämä johtuu siitä, että mallin ainoa satunnaisuus tulee tuntemattomasta kuolinhetkestä T. Selviytyminen seuraaviin ajan hetkiin ei muuta elossaolotodennäköisyyksiä siinä mielessä riittävän voimakkaasti, että henkilön optimaalinen valinta muuttuisi merkittävästi ajan edetessä. Alla on esimerkinomaisesti kuva 1958-syntyneiden kohortille 60- ja 65-vuotiaan henkilön elossaolotodennäköisyyksistä.



Kuva 6.6: 1958-syntynyt mies ikävälillä 60-65v. Todennäköisyydet olla elossa eri ikäisinä.

Kuten kuvastakin voimme havaita, todennäköisyydet muuttuvat erittäin vähän. Erityisesti ero todennäköisyyksissä elää 90-vuotiaaksi tai vanhemmaksi on jo lähes mitätön. Jotta dynaaminen malli muuttaisi valintoja merkittävämmin, tarvitsisi malliin jonkin ulkoisen lisätekijän, josta henkilö ei ole tietoinen alkuhetkellä. Tällöin se ei myöskään näkyisi alkuhetkellä tulevan kassavirran utiliteetin odotusarvossa. Tälläinen tekijä voisi olla esimerkiksi työkyvyn romahdus, joka muuttaisi työntarjontaa. Myös esimerkiksi kuolevuuden muutos vaikkapa sairauden johdosta muuttaisi valintoja merkittävämmin.

Luku 7

Johtopäätökset

Rakentamamme malli pystyi lopulta muodostamaan henkilöille optimaalisia valintoja OVEn hyödyntämiseksi lisätulona. Tutkimuksessa havaittiin, että erilaiset lähtötilanteet johtavat lopulta erilaisiin valintoihin. Sukupuolen ja ikäluokan roolit valinnoissa näyttäytyivät merkittävinä tekijöinä. Havaitsimme kuitenkin, että 1958-syntyneiden ikäluokalla sukupuolten erot olivat merkittävästi suuremmat kuin 1962-syntyneillä. Kaiken kaikkiaan pidempään elinikään, eli matalampaan kuolevuuteen vaikuttavat tekijät kasvattivat OVE-valintoja systemaattisesti. Tuloksissa huomattiin myös, että VE-aloituksen kasvaessa myös OVE-aloitukset kasvoivat pääsääntöisesti poikkeuksia lukuunottamatta. Pienimmällä tulotasolla taas tulos osoittautui täysin päinvastaiseksi. Myös koron merkitykseen tehtiin lyhyt katsaus, jossa havaittiin palkkakertoimen kasvun korottavan OVE-valintoja. Sensitiivisyyttä ei kuitenkaan pystytty kovinkaan tarkalla tasolla osoittamaan tulotasofunktion muodosta johtuen.

Ainakin teoriassa dynaaminen malli oli rationaalisuusoletuksen takia perusteltu, mutta osoittautui, että henkilöiden tehdessä valintoja 61-66v ikähaarukassa, eivät elossaolotodennäköisyydet muuttuneet tarpeeksi merkittävästi muuttamaan hetkellisiä optimeja juurikaan. Jos taas kuolevuus olisi asetettu kovinkin suureksi, olisivat valinnat ajautuneet väkisinkin alkuhetkeen, koska odotusarvomielessä henkilö olisi preferoinut tulevaisuuden sijasta nykyhetkeä paljon voimakkaammin.

On myös hyvä muistaa, että tuloksissa käytetty alin pohjaeläkkeen määrä, eli 1800 e/kk, on todellisuudessa likimain keskimääräinen eläkkeen määrä Suomessa. Kysymys ei siis yleisellä tasolla ole lainkaan pienituloisista. Tällä rajasimme pois mahdollisuuden muihin sosiaalietuuksiin, joita todellisuudessa ovat esimerkiksi kansaneläke, asumistuki ja toimeentulotuki. Näitä ei kuitenkaan haluttu tässä tutkimuksessa huomioida. Jatkotutkimuksessa mukaan voisi ottaa myös tällaiset henkilöt, jotka saavat eläkkeiden ja ansioiden lisäksi myös edellä mainittuja etuuksia.

Tutkimuksessa estimoidut utiliteettifunktiot osoittivat, että tuloista saatava rajahyöty on laskeva. Lisäksi havaittiin, että eri ikäisten utiliteettifunktiot eroavat melko paljonkin toisistaan, kun taas sukupuolen vaikutus utiliteettiin jäi melko merkityksettömäksi. Lopulta havaitsimme, että mitä vanhemmasta henkilöstä oli kysymys, sitä vähemmän tuloilla oli merkitystä hyötyyn, tarkemmin ottaen onnellisuuteen. Mainittakoon vielä, että tutkimuksessamme käytetty onnellisuus utiliteettina on vain eräs tapa mitata tuloista saatavaa hyötyä. Muita mahdollisia tapoja voi olla monia, joten tuloksetkin saattaisivat olla erilaisia eri mittareilla.

Tutkimuksen alussa nostimme esiin Jari Kanniston tilastokatsauksen [2] OVEn ensimmäisestä vuodesta. Tilastokatsauksesta käy ilmi, että OVE on ollut merkittävästi suuremmassa suosiossa miesten kuin naisten keskuudessa esimerkiksi 1956-syntyneillä ([2] s.14). Tämä ikäluokka koostui viime vuonna keskimäärin 61-vuotiaista, joten kyseisessä ikäluokassa OVEn aloittaneet aloittivat sen lähestulkoon heti kuin mahdollista. Myös meidän saamiemme tulosten perusteella miehet aloittivat OVEn aikaisemmin kuin naiset, joten tuloksemme vaikuttavat johdonmukaisilta. 1956-syntyneiden alin vanhuuseläkeikä on 63v 6kk, joten optimaaliset valinnat tällä ikäluokalla saattavat tämän takia painottua enemmän alimpaan OVE-ikään. Toisaalta totuus valintojen painottumisesta selviää vasta tulevaisuudessa. Kanniston katsauksesta on myös havaittavissa, että 50-prosentin OVE on ollut merkittävästi suuremmassa suosiossa kuin 25-prosentin OVE ([2] s.33). Tämä ei käy tuloksistamme ilmi täysin samalla tavalla, sillä optimaalisissa ratkaisuissa 25-prosentin OVE oli monissa tapauksissa kannattavaa valita maksuun joksikin aikaa ennen 50-prosentin OVEa. Toisaalta OVEn ensimmäisenä vuonna mahdollisuus OVEen tuli monille ikäluokille siten, että ikäluokat olivat jo iältään reilusti yli alimman OVE-iän. Lisäksi tutkimamme ikäluokat voivat hakea OVEa vasta tulevaisuudessa, joten heistä ei löydy vielä tilastoja. Loppujen lopuksi tarkempaa vertailua on saatavilla vasta useamman vuoden päästä kun tilastoja OVEsta on saatavilla enemmän, jolloin yksittäisten ikäluokkien valintojen painottumisistakin on olemassa tilastollista faktaa.

Olemme koko tutkimuksen ajan puhuneet vain eläkkeensaajan näkökulmasta. Lopuksi on luontevaa tuoda myös työeläkevakuutusyhtiön näkökulma asiaan. Päätäntävalta valintahetkistä on yksinomaan eläkkeensaajilla, joten työeläkevakuutusyhtiö ottaa valinnat niin kuin eläkkeensaajat päättäävät. Tutkimuksessa käytetty malli mahdollistaa kuitenkin sen, että työeläkevakuutusyhtiö pystyy arvioimaan minkälaisiin valintoihin erilaiset henkilöt keskimäärin lopulta päätyvät. Jos samankaltaisia henkilöitä on tarpeeksi iso joukko, pystyy työeläkevakuutusyhtiö arvioimaan tulevien korvausten määrää tällaiselle joukolle. Tällöin siis tulevat korvaukset jollekkin henkilöprofiilille estimoiduilla valinnoilla $\tau_{25}^*, \tau_{50}^*, \tau_{ve}^*$ vastaavat likimain määrää

$$n \sum_{t=0}^{\infty} E(t)\mathbb{P}(T > t),$$

tarpeeksi suurella samanlaisen profiilin omaavilla henkilöiden määrällä n. Toisaalta tämä vaatii oletuksen siitä, että henkilöiden työntarjonta ja vanhuuseläkkeen alkaminen tunnetaan. Jos myös vanhuuseläkkeen alkaminen haluttaisiin satunnaistaa, tulisi eläkkeensaajan utiliteettifunktion ottaa huomioon myös työntarjonnan mahdollinen negatiivinen utiliteetti. Tästä näkökulmasta kiinnostunut lukija voi perehtyä teoksiin, jotka käsittelevät niin sanottua "*labor-leisure*" -mallia, jossa henkilön ongelmana on valita optimaalinen ratkaisu yhdistämään työ ja vapaa-aika. Jatkotutkimuksen kannalta tällaisen näkökulman tuominen tutkimuksemme malliin mahdollistaisi myös työntarjonnan ja vanhuuseläkehetken satunnaistamista, joka johdattaisi mahdollisesti todenmukaisempiin lopputuloksiin.

Kirjallisuutta

[1] Eläketurvakeskus, Vuoden 2017 eläkeuudistus.
<https://www.etk.fi/elakejarjestelmat/elakejarjestelma-muutoksessa/lainmuutosten-taustoja/elakeuudistus-2017/>. 16.3.2018.

[2] Jari Kannisto: Oven ensimmäinen vuosi, Katsaus osittaisen varhennetun vanhuuseläkkeen valinneisiin. Eläketurvakeskus, 2018.

[3] Rick Durrett: Probability: Theory and Examples, Edition 4.1, Cambridge University Press, 2013.

[4] Martti Pesonen, Pentti Soininen ja Tapani Tuominen: Henkivakuutusmatematiikka, 3. uudistettu painos, FINVA, 2014.

[5] Kobylanski, Magdalena; Quenez, Marie-Claire; Rouy-Mironescu, Elisabeth. Optimal multiple stopping time problem. Ann. Appl. Probab. 21 (2011), no. 4, 1365–1399. doi:10.1214/10-AAP727. <https://projecteuclid.org/euclid.aoap/1312818839>.

[6] ESS Round 8: European Social Survey Round 8 Data (2016). Data file edition 1.0. NSD - Norwegian Centre for Research Data, Norway - Data Archive and distributor of ESS data for ESS ERIC.

[7] Säädöspalvelu Eläketurvakeskus, TyEL/TEL:n mukaisen eläkevakuutuksen yleiset laskuperusteet.
<http://www.saadospalvelu.fi/fi/perusteet/laskuperusteet/yleiset_laskuperusteet>. 16.3.2018.

[8] Säädöspalvelu Eläketurvakeskus, TyEL/TEL:n mukaisen eläkevakuutuksen erityisperusteet.
<http://www.saadospalvelu.fi/fi/perusteet/laskuperusteet/tyoelakeyhtiot>. 16.3.2018.

[9] Eläketurvakeskus, Suhdanne-ennuste.
<https://www.etk.fi/tutkimus-tilastot-ennusteet/ennustelaskelmat/suhdanne-ennuste/uusin-suhdanne-ennuste/>. 7.4.2018.

[10] Eläketurvakeskus, Elinaika vaikuttaa eläkkeen määrään.
<https://www.etk.fi/elakejarjestelmat/elaketurva/elinaikakerroin/>. 25.3.2018.

[11] Työeläkelakipalvelu, Elinaikakertoimen arvot.
<https://www.tyoelakelakipalvelu.fi/telp-publishing/vepa/document.faces?document_id=310821>. 20.4.2018.

[12] Työeläkelakipalvelu, työeläkeindeksien määrääminen.
<https://www.tyoelakelakipalvelu.fi/telp-publishing/vepa/document.faces?document_id=308932& navigation_ history=200013_ 0,200015>. 25.3.2018.

[13] Veronmaksajat, Eläkkeensaajan ja palkansaajan veroprosentit 2018.
<https://www.veronmaksajat.fi/luvut/Laskelmat/Palkansaajan-veroprosentit/>
<https://www.veronmaksajat.fi/luvut/Laskelmat/Elakkeensaajan-veroprosentit/>
25.3.2018.

Liite A

Laskentaperusteita

A.1 Eläkeiät

Alla olevassa taulukossa on eritelty syntymävuosittain alin osittaiseen varhennettuun vanhuuseläkkeeseen oikeuttava ikä, sekä alin vanhuuseläkkeeseen oikeuttava ikä.

Syntymävuosi	**Alin OVE-ikä**	**Alin vanhuuseläkeikä**
1954	61v	63v
1955	61v	63v 3kk
1956	61v	63v 6kk
1957	61v	63v 9kk
1958	61v	64v
1959	61v	64v 3kk
1960	61v	64v 6kk
1961	61v	64v 9kk
1962	61v	65v
1963	61v	65v
1964	62v	65v

A.2 Elinaikakerroin, palkkakerroin ja eläkeindeksi

Eläketurvakeskuksen verkkosivuilla [9] ja [10], sekä työeläkelakipalvelussa [11] ilmoitettujen lukujen pohjalta valitsemme laskennassa käytettävät numeeriset arvot seuraavasti:

Vuonna 1956 syntyneiden ikäluokka on viimeisin, jolle elinaikakerroin on vahvistettu. Täten käytämme vuonna 1956 syntyneille ja nuoremmille ikäluokan vahvistettua elinaikakerrointa. Myöhemmin syntyneille ikäluokille käytämme ennustettua arvoa. Työeläkelakipalvelun kertoimista [11] muodostettu taulukko alla:

Syntymävuosi	**Elinaikakerroin**
1954	0.96800
1955	0.96344
1956	0.96102
1957	*0.957*
1958	*0.953*
1959	*0.949*
1960	*0.945*
1961	*0.939*
1962	*0.934*
1963	*0.929*
1964	*0.924*

Palkkakertoimen ja eläkeindeksin kasvuille käytämme Eläketurvakeskuksen viimeisimmän suhdanne-ennusteen (15.1.2018) mukaisia lukuja. Nämä saamme ottamalla vuosien 2019-2022 ennustettujen vuosimuutosten keskiarvon, siis

$$i_{keskiarvo} = \frac{1}{4}\sum_{v=2019}^{2022} i(v)$$

Palkkakertoimelle tämä on $2,125\%$ ja eläkeindeksille $1,7\%$. Käytämmämme luvut ovat siis

$$\begin{aligned} i_p &= 0.02125 \\ i_e &= 0.017. \end{aligned}$$

A.3 TyEL-kuolevuus

Työntekijän eläkelain (TyEL) mukaisissa laskuperusteissa [7] ja [8] x ikäisen henkilön kuolevuus määritellään kaavalla

$$\mu_x = a_1 e^{a_2(x+b_2)}.$$

Vakiot a_1, a_2 ovat määritelty yleisissä laskuperusteissa [7] sukupuolittain siten että miehille

$$a_1 = \begin{cases} e^{\frac{6}{7}1{,}027-11{,}18}, \text{ kun } x + b_2 \leq 70 \\ e^{\frac{6}{7}1{,}217-12{,}68}, \text{ kun } x + b_2 > 70 \end{cases} \qquad a_2 = \begin{cases} \frac{6}{7} \cdot 0,1027 \text{ , kun } x + b_2 \leq 70 \\ \frac{6}{7} \cdot 0,1217 \text{ , kun } x + b_2 > 70, \end{cases}$$

ja naisille

$$a_1 = \begin{cases} e^{\frac{6}{7}1{,}031-11{,}86}, \text{ kun } x + b_2 \leq 70 \\ e^{\frac{6}{7}1{,}416-14{,}79}, \text{ kun } x + b_2 > 70 \end{cases} \qquad a_2 = \begin{cases} \frac{6}{7} \cdot 0,1031 \text{ , kun } x + b_2 \leq 70 \\ \frac{6}{7} \cdot 0,1416 \text{ , kun } x + b_2 > 70. \end{cases}$$

Lisäksi erityisperusteissa [8] vakio b_2 määritellään yhteisesti sukupuolille siten, että

$$b_2 = \begin{cases} 5, \text{ kun } v - x < 1930 \\ 3, \text{ kun } 1930 \leq v - x < 1940 \\ 2, \text{ kun } 1940 \leq v - x < 1950 \\ 0, \text{ kun } 1950 \leq v - x < 1960 \\ -2, \text{ kun } 1960 \leq v - x < 1970 \\ -3, \text{ kun } 1970 \leq v - x < 1980 \\ -5, \text{ kun } 1980 \leq v - x < 1990 \\ -7, \text{ kun } 1990 \leq v - x < 2000 \\ -8, \text{ kun } 2000 \leq v - x < 2010 \\ -10, \text{ kun } 2010 \leq v - x < 2020, \end{cases}$$

missä v on kuluva vuosi.

A.4 Verotus

Verojen muodostamiseen hyödynnämme *Veronmaksajain keskusliiton* taulukkoa [13] palkansaajien, sekä eläkkeensaajien keskimääräisistä veroprosenteista. Lähteen veroprosenteissa on huomioitu monipuolisesti erilaisia tuloista tehtäviä vähennyksiä ja lisäveroja, joten ne kuvaavat tarkoituksiimme sopivasti keskimääräistä tulonsaajan veroa. Merkitsemme käytettävää taulukkoa alaindeksillä siten että v_A on palkansaajan veroprosentti, ja v_E on eläkkeensaajan veroprosentti. Olkoon lisäksi $B = E + A$ bruttotulot. Yksinkertaistamme veroprosentin laskemista niin että painotamme v_A ja v_E käyttöä eläkkeiden sekä ansioiden suhteessa. Siis käyttämämme veroprosentti on

$$\frac{E}{B} v_E(B) + \frac{A}{B} v_A(B).$$

Kertomalla tätä bruttotuloilla B, saamme verojen euromääräksi

$$v(E, A) = Ev_E(B) + Av_A(B).$$

Liite B

SAS ja estimointi

```
DATA dataFI;
        set mylib.ess8e01;
        where cntry = 'FI';
RUN;


PROC FORMAT;
        value ika_kateg
        low-63 = '-63'
        64-68 = '64-68'
        69-75 = '69-75'
        76-high = '76-';
RUN;


PROC SQL;
CREATE TABLE utild0 AS SELECT * FROM(

SELECT
HAPPY,
STFLIFE,
AGEA AS ika,
AGEA format = ika_kateg. AS ikaluokka,
HINCTNTA AS tulo_luokka,
SUM(HAPPY, STFLIFE) AS HAPPY2

FROM dataFI
WHERE HAPPY < 11 AND
          HINCTNTA < 11 AND
          STFLIFE < 11 AND
          AGEA > 57 AND
)
ORDER BY ika
;
RUN;


PROC SGPANEL data=utild0;
        PANELBY ikaluokka;
        SCATTER X=tulo_luokka Y=happy2;
        COLAXIS label='tulotaso';
        ROWAXIS label='Koettu onnellisuus';
RUN;


PROC nlin data=utild0 NOITPRINT;
        model HAPPY2 = a * tulo_luokka ** b;
        by ikaluokka;
        PARMS
        a=0.001
        b=0.001;
RUN;
```

Liite C

Python koodia

Utiliteettifunktio (utiliteettifunktio)

```
def kok(t):
    return int((t/12)-(t/12)%1)

def kk(vuosi, k):
    return vuosi*12 + k

def D(t1,t2,i):
    return i**(kok(t2)-kok(t1))

def alpha(x):
    if x < 80:
        return 333.71 - 13.7454*x + 0.194193*x**2 - 0.000901286*x**3
    else:
        return 15.454768000000001

def beta(x):
    if x < 80:
        return -21.3586 + 0.929945*x - 0.0132889*x**2 + 0.0000625833*x**3
    else:
        return 0.03068960000000942

'alle 1078 nettotuloja ei huomoida koska eivät tarpeellisia'

def tulokymmenys(e,t0,t):
    kerroin = D(t0,t,1.02125)

    if e < 1335*kerroin:
        return 4
    elif e < 1631*kerroin:
        return 5
    elif e < 1980*kerroin:
        return 6
    elif e < 2367*kerroin:
        return 7
    elif e < 2824*kerroin:
        return 8
    elif e < 3520*kerroin:
        return 9
    else:
        return 10

def utiliteettifunktio(e, x, t0, t):
    a = alpha(x)
    b = beta(x)
    t = tulokymmenys(e, t0, t)
    util = a*t**b

    return util
```

Verotus (verotus)

```
'Ansiovero huiomioi oikein vain jos x on vähintään 1760'

def ansiovero(x):
    verot = 309.84

    if x < 2160:
        return (verot + (x-1760)*0.39)/x
    else:
        verot += (2160-1750)*0.39
        if x < 2400:
            return (verot + (x-2160)*0.353)/x
        else:
            verot += (2400-2160)*0.353
            if x < 2720:
                return (verot + (x-2400)*0.455)/x
            else:
                verot += (2720-2400)*0.455
                if x < 3840:
                    return (verot + (x-2720)*0.471)/x
                else:
                    verot += (3840-2720)*0.471
                    if x < 6640:
                        return (verot + (x-3840)*0.507)/x
                    else:
                        verot += (6640-3840)*0.507
                        if x < 7600:
                            return (verot + (x-6640)*0.597)/x
                        else:
                            verot += (7600-6640)*0.597
                            if x < 10240:
                                return (verot + (x-7600)*0.588)/x
                            else:
                                verot += (10240-7600)*0.588 + (x-10240)*0.571
    return verot/x

'Elakevero huomioi oikein vain jos x on vähintään 1750'

def elakevero(x):
    verot = 167*0.406 + 583*0.431

    if x < 1917:
        return (verot + (x-1750)*0.406)/x
    else:
        verot += (1917-1750)*0.406
        if x < 2083:
            return (verot + (x-1917)*0.344)/x
        else:
            verot += (2083-1917)*0.344
            if x < 2250:
                return (verot + (x-2083)*0.427)/x
            else:
                verot += (2250-2083)*0.427
                if x < 2583:
                    return (verot + (x-2250)*0.311)/x
                else:
                    verot += (2583-2250)*0.311
                    if x < 3500:
                        return (verot + (x-2583)*0.466)/x
                    else:
                        verot += (3500-2583)*0.466
                        if x < 3917:
                            return (verot + (x-3500)*0.441)/x
                        else:
                            verot += (3917-3500)*0.441
                            if x < 6250:
                                return (verot + (x-3917)*0.5)/x
                            else:
                                verot += (6250-3917)*0.5 + (x-6250)*0.6
    return verot/x

def verotus(ansiot, elakkeet):

    return elakkeet*elakevero(ansiot+elakkeet) + ansiot*ansiovero(ansiot+elakkeet)

def netto(ansiot, elakkeet):
    return ansiot + elakkeet - verotus(ansiot, elakkeet)
```

Elossaolotodennäköisyys ja diskonttotekijä (kuolevuus)

```
import numpy as np
import utiliteettifunktio as u

def a_1(x,b2):
    if x+b2 > 70:
        return np.exp((6/7)*1.217-12.68)
    else:
        return np.exp((6/7)*1.027-11.18)

def a_2(x,b2):
    if x+b2 > 70:
        return (6/7)*0.1217
    else:
        return (6/7)*0.1027

def b_2(x):
    if x >= 88:
        return 5
    elif x >= 78:
        return 3
    elif x >= 68:
        return 2
    elif x >= 58:
        return 0
    elif x >= 48:
        return -2
    elif x >= 38:
        return -3
    elif x >= 28:
        return -5
    elif x >= 18:
        return -7
    elif x >= 8:
        return -8
    else:
        return -10


def TYEL_kuolevuus(a1,a2,b2,x,t):
    return a1*np.exp(a2*(x+t+b2))

def tpx(x,t):
    b2 = b_2(x)
    a1 = a_1(x,b2)
    a2 = a_2(x,b2)

    return np.exp((1/a2)*(TYEL_kuolevuus(a1,a2,b2,x,0) - TYEL_kuolevuus(a1,a2,b2,x,t)))

def diskonttotekija(x,t,i_e):
    return np.exp(-np.log(1+i_e)*(t-x)*u.beta(x))
```

Kassavirta (kassavirta2)

```
import numpy as np
import verotus as v
import utiliteettifunktio as u
import kuolevuus as k

def kok(t):
    return int((t/12)-(t/12)%1)

def kk(vuosi, k):
    return vuosi*12 + k

def D(t1,t2,i):
    return i**(kok(t2)-kok(t1))

def c(tve, t, eak):
    return eak*(1-0.004*(tve-t))

'______________________________________________________________'
```

```
def elakevirta(t0, t_ove25, t_ove50, t_ve, tve, Ep, pker, eind, eak):

    def elake(t, kerroin):
        kv = np.zeros(kk(120,0)-t0)
        kv[t-t0] = kerroin * Ep * D(t0, t, pker) * c(tve, t, eak)
        for i in range(t-t0+1, len(kv)):
            if (i)%12 == 0:
                kv[i] = kv[i-1] * D(0, 12, eind)
            else:
                kv[i] = kv[i-1]
        return kv

    ove25 = elake(t_ove25, 0.25)
    ove50 = elake(t_ove50, 0.25)
    ve    = elake(t_ve, 0.5)

    return ove25 + ove50 + ve

def ansiot(t0, t_ove25, t_ove50, t_ve, pker, ansio):
    ans = np.zeros(kk(120,0)-t0)
    i_ove25 = t_ove25-t0
    i_ove50 = t_ove50-t0
    i_ve = t_ve - t0



    if i_ove25 > 0:
        ans[:i_ove25] = ansio
    if i_ove50 > 0:
        ans[i_ove25:i_ove50] = ansio
    ans[i_ove50:i_ve] = ansio

    ans_t0 = np.copy(ans)
    for i in range(len(ans)):
        ans_t0[i] = ans_t0[i] * D(t0+i, t0, pker)
    return ans, ans_t0

def ansiokarttumavirta(t0, t_ove25, t_ove50, t_ve, tve, karttumakerroin, pker, eind, eak, ansio):
    i_ove25 = t_ove25-t0
    ik_ove25 = (kok(t_ove25)-kok(t0))
    i_ove50 = t_ove50-t0
    i_ve = t_ve-t0

    karttumat = np.copy(ansiot(t0, t_ove25, t_ove50, t_ve, pker, ansio)[1]) * karttumakerroin
    karttumavirta = np.zeros(kk(120,0)-t0)

    OVE_karttuma = np.sum(karttumat[:ik_ove25*12])*0.5
    OVE25_karttuma = (OVE_karttuma/2)*D(t0, t_ove25, pker)
    OVE50_karttuma = (OVE_karttuma/2)*D(t0, t_ove50, pker)
    VE_karttuma = np.sum(karttumat[ik_ove25*12:i_ve])+OVE_karttuma*D(t0, t_ve, pker)*c(tve, t_ve, eak)

    for i in range(i_ove25, len(karttumavirta)):
        karttumavirta[i] += OVE25_karttuma*D(t_ove25, t0+i, eind)
        if i >= i_ove50:
            karttumavirta[i] += OVE50_karttuma*D(t_ove50, t0+i, eind)
        if i >= i_ve:
            karttumavirta[i] += VE_karttuma*D(t_ve, t0+i, eind)

    return karttumavirta

def kassavirta(t0, t_ove25, t_ove50, t_ve, tve, Ep, pker, eind, eak, karttuma):

    elakkeet = elakevirta(t0, t_ove25, t_ove50, t_ve, tve, Ep, pker, eind, eak)
    ansiokarttumat = ansiokarttumavirta(t0, t_ove25, t_ove50, t_ve, tve, karttuma, pker, eind, eak)
    ansiotulot = ansiot(t0, t_ove25, t_ove50, t_ve, pker)[0]

    return elakkeet + ansiokarttumat + ansiotulot


def nettokassavirta(t0, t_ove25, t_ove50, t_ve, tve, Ep, pker, eind, eak, karttuma, ansio):

    elakkeet = elakevirta(t0, t_ove25, t_ove50, t_ve, tve, Ep, pker, eind, eak)
              + ansiokarttumavirta(t0, t_ove25, t_ove50, t_ve, tve, karttuma, pker, eind, eak, ansio)
    ansiotulot = ansiot(t0, t_ove25, t_ove50, t_ve, pker, ansio)[0]

    netto = np.zeros(len(elakkeet))
    for i in range(len(netto)):
        netto[i] = v.netto(ansiotulot[i], elakkeet[i])

    return np.array([ansiotulot, elakkeet, ansiotulot+elakkeet, netto]).T
```

```
def odotettuhyöty(t0, t_ove25, t_ove50, t_ve, tve, Ep, pker, eind, eak, karttuma, ika, ansio):
    nettokv = nettokassavirta(t0, t_ove25, t_ove50, t_ve, tve, Ep, pker, eind, eak, karttuma, ansio)[:,3]
    odotettuhyöty = np.zeros(len(nettokv))

    x = ika/12
    t = t0
    for i in range(len(odotettuhyöty)):
        odotettuhyöty[i] = u.utiliteettifunktio(nettokv[i], (t+i)/12, kk(61,0), kk(61,0)+i) * k.tpx(x, (t+i)/12-x)
                           * k.diskonttotekija(x, (t+i)/12, eind-1)

    return odotettuhyöty
```

Valintahetkien optimointi (OptimaalinenValinta)

```
import numpy as np
import kassavirta as kv
import kassavirta2 as kv2
import kuolevuus as kuol

def optimoiOVE25(t0, t, tve, Ep, pker, eind, eak, karttuma, t_ve, ansio):
    utiliteetti = 0
    t_n = t-t0
    t25_opt = 0
    t50_opt = 0

    for t1 in range(t, t_ve+1):
        for t2 in range(t1, t_ve+1):
            odotetuthyödyt = kv2.odotettuhyöty(t0, t1, t2, t_ve, tve, Ep, pker, eind, eak, karttuma, t, ansio)[t_n:]
            summa = np.sum(odotetuthyödyt)
            if summa > utiliteetti:
                if t1 > t:
                    return 999, 999

                utiliteetti = summa
                t25_opt = t1
                t50_opt = t2

    return t25_opt/12, t50_opt/12

def optimoiOVE50(t0, t, tve, Ep, pker, eind, eak, karttuma, t_ve, t25_opt, ansio):
    utiliteetti = 0
    t_n = t-t0
    t50_opt = 0

    for t2 in range(t, t_ve+1):
        odotetuthyödyt = kv2.odotettuhyöty(t0, t25_opt, t2, t_ve, tve, Ep, pker, eind, eak, karttuma, t, ansio)[t_n:]
        summa = np.sum(odotetuthyödyt)
        if summa > utiliteetti:
            if t2 > t:
                return 999, 999

            utiliteetti = summa
            t50_opt = t2
```

Henkilön valintojen simulointi (LopullinenValinta)

```
import OptimaalinenValinta as opt_val
import kassavirta as kv
import numpy as np
import kassavirta2 as kv2

def OVET_lopullinenvalinta(t0, tve, Ep, eak, t_ve, ansio):
    pker = 1.02125
    eind = 1.017
    karttuma = 0.015/12
    Lopulliset_valinnat = np.zeros(3)
    valintojen_kehitys = np.zeros([t_ve-t0+1, 2])

    for i in range(0, t_ve-t0+1):
        valinnat1 = opt_val.optimoiOVE25(t0, t0+i, tve, Ep, pker, eind, eak, karttuma, t_ve, ansio)
```

```
    if valinnat1[0] <= (t0+i)/12:
        ala_raja = i
        break

Lopulliset_valinnat[0] = valinnat1[0]
print("ove25 kiinnitetty", valinnat1[0])

for j in range(ala_raja, t_ve-t0+1):
    valinnat2 = opt_val.optimoiOVE50(t0, t0+j, tve, Ep, pker, eind, eak, karttuma, t_ve,
                                                             int(Lopulliset_valinnat[0]*12), ansio)
    if valinnat2[1] <= (t0+j)/12:
        break
Lopulliset_valinnat[1] = valinnat2[1]
print("ove50 kiinnitetty", valinnat2[1])

return Lopulliset_valinnat
```